# Linearisierung und logarithmisches Papier

Funktionale Zusammenhänge können wir besser mit Hilfe graphischer Darstellungen erkennen als aus Wertetabellen. Das gilt vor allem, wenn die Werte nicht mathematisch exakt sind, sondern z.B. Messwerte eines physikalischen Versuchs sind und entsprechend streuen.

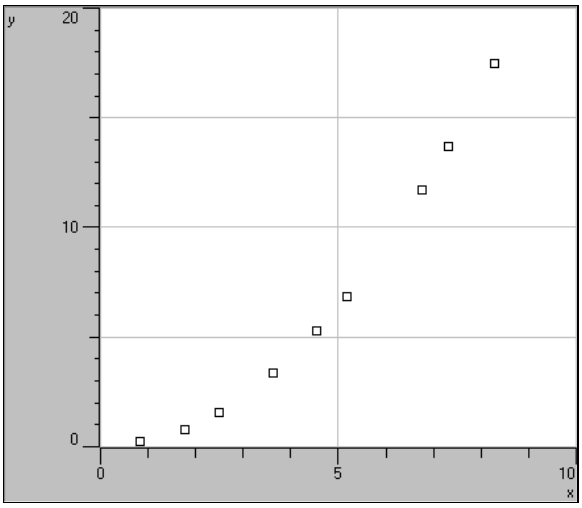
Aber auch Graphen können täuschen. Welcher der folgenden Graphen gehört z.B. zu einer

a) Parabel 2.Grades ($y \sim x^2$)　　b) Parabel 3.Grades ($y \sim x^3$)

c) zu einer linearen Hyperbel ($y \sim 1/x$)　　d) zu einer quadratischen Hyperbel ($y \sim 1/x^2$) ?

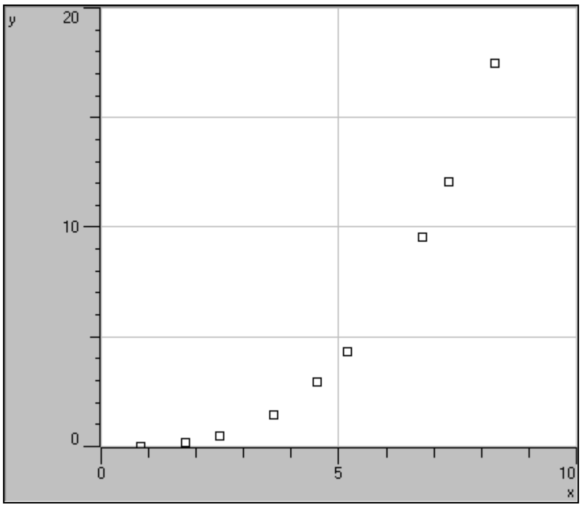
A)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0,83 | 1,76 | 2,49 | 3,62 | 4,55 | 5,18 | 6,75 | 7,31 | 8,27 |
| y | 0,22 | 0,79 | 1,59 | 3,35 | 5,30 | 6,87 | 11,7 | 13,7 | 17,5 |



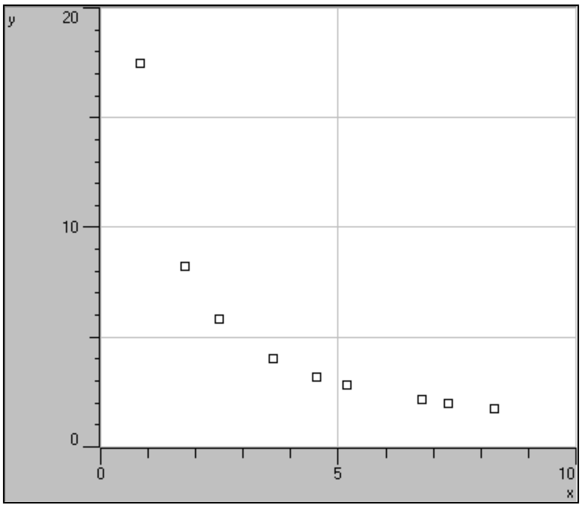

B)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0,83 | 1,76 | 2,49 | 3,62 | 4,55 | 5,18 | 6,75 | 7,31 | 8,27 |
| y | 0,02 | 0,17 | 0,48 | 1,47 | 2,92 | 4,31 | 9,53 | 12,1 | 17,5 |



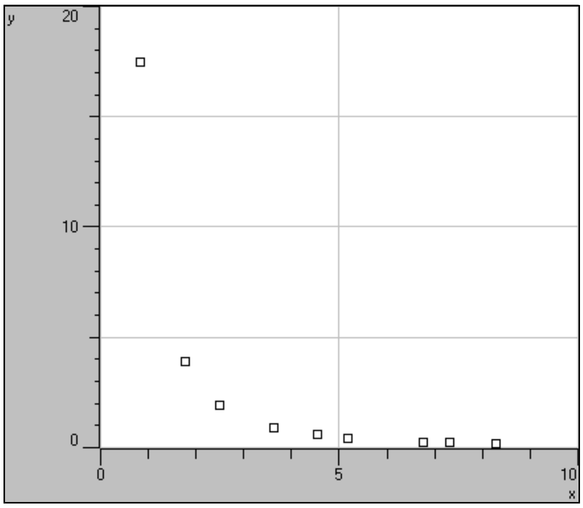

C)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0,83 | 1,76 | 2,49 | 3,62 | 4,55 | 5,18 | 6,75 | 7,31 | 8,27 |
| y | 17,5 | 8,25 | 5,83 | 4,01 | 3,19 | 2,80 | 2,15 | 1,99 | 1,76 |




D)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0,83 | 1,76 | 2,49 | 3,62 | 4,55 | 5,18 | 6,75 | 7,31 | 8,27 |
| y | 17,5 | 3,89 | 1,94 | 0,92 | 0,58 | 0,45 | 0,26 | 0,23 | 0,18 |




Auflösung: Es gehören zusammen a) und A), b) und B), c) und C), d) und D).

Im direkten Vergleich war die Lösung nicht schwer zu finden, aber bei isolierten Graphen sieht es da schon anders aus. Gut erkennen kann man dagegen, ob ein Graph eine Gerade ist.

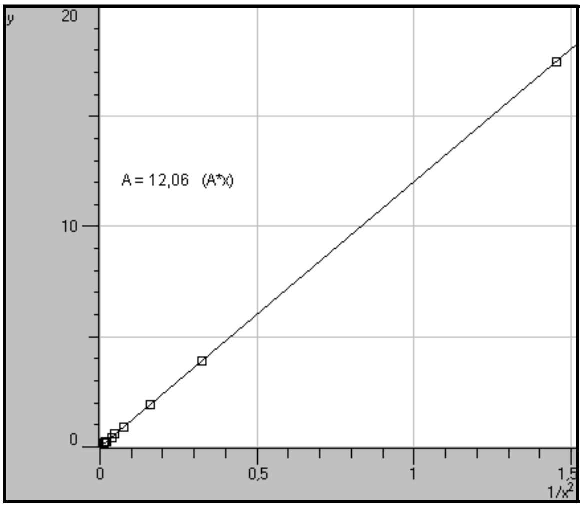
Im Prinzip lässt sich jede Funktion linearisieren, so dass der Graph eine Gerade ergibt.

Ist eine Funktion mit der Gleichung y=f(x) gegeben, so trägt man auf der x-Achse nicht die x-Werte, sondern die f(x)-Werte auf, die man zuvor natürlich erst berechnen muss. Der Graph ist wegen y=f(x) trivialerweise die erste Winkelhalbierende mit der Steigung 1.

Weiß man nur, dass y=c·f(x) ist, so ergibt sich eine Ursprungsgerade der Steigung c=y/f(x).

Das soll am Fall d einmal durchgespielt werden:

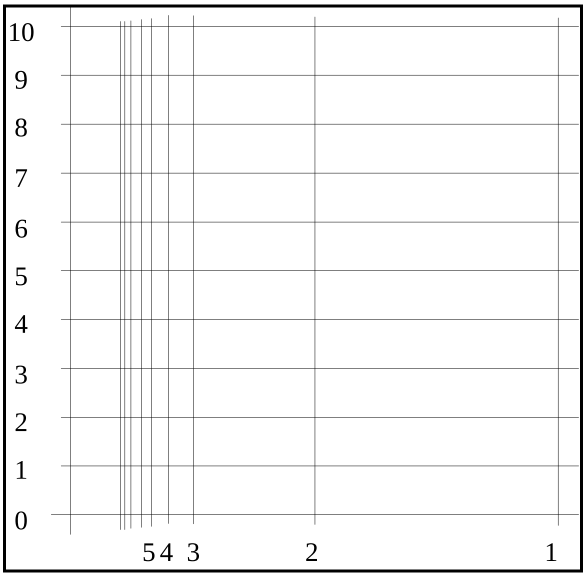
| x | 0,83 | 1,76 | 2,49 | 3,62 | 4,55 | 5,18 | 6,75 | 7,31 | 8,27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 17,5 | 3,89 | 1,94 | 0,92 | 0,58 | 0,45 | 0,26 | 0,23 | 0,18 |
| 1/x² | 1,452 | 0,323 | 0,161 | 0,076 | 0,048 | 0,037 | 0,022 | 0,019 | 0,015 |




Der Faktor c ergibt sich aus der Zeichnung durch Bestimmung der Geradensteigung zu 12,06.

Die der Wertetabelle zu Grunde liegende Funktion hat also die Gleichung: $f(x)=12{,}06/x^2$ .

Beim Einsatz eines Computers muss man sich ggf. noch nicht einmal die Mühe der zusätzlichen Berechnung machen, da verschiedene Abbildungsoptionen im Programm (hier wurde CassyLab der Firma Leybold benutzt) enthalten sind.




Für das Rechnen „mit Papier und Bleistift“ muss man entweder die zusätzlichen Berechnungen auf sich nehmen oder man verwendet geeignetes Papier. Rechts ist der prinzipielle Aufbau eines Zeichenpapiers dargestellt, mit dem man Proportionalitäten der Art y~1/x als Gerade abbilden kann. Während die senkrechte y-Achse linear unterteilt ist, sind auf der waagrechten Achse die Streckenlängen für 1/x abgetragen. Statt also nun die darzustellenden x-Werte in die Werte 1/x umzurechnen, trägt man einfach beim angegebenen x-Wert den entsprechenden Punkt ein.

Für jeden Funktionstyp ist natürlich ein spezielles Papier notwendig. Die (früher) am meisten verwendeten Papiertypen sind das einfach-logarithmische und das doppelt-logarithmische Papier.

Auf den folgenden Seiten wird die Arbeit mit diesen Papieren erläutert.

## Einfach-logarithmisches Papier

Die waagrechte Achse ist äquidistant unterteilt. Der Maßstab ist beliebig wählbar. Die Skalenteilung auf der nächsten Seite ist also nur als Beispiel zu sehen.

Die senkrechte Achse ist logarithmisch geteilt, d.h. sie enthält die Logarithmen der Zahlen als Streckenlänge. Da log(10)-log(1)=log(100)-log(10)=log(1000)-log(100)=... sind die Strecken zwischen gleichen Zahlen gleich lang. Ohne Probleme lässt sich also die Skala so einteilen, dass die 1 unten gleich einer Zehnerpotenz ist und die weiter oben folgenden Einsen jeweils die nächstgrößere Zehnerpotenz bedeuten. Stände die 1 unten im Beispiel für $0{,}1=10^{-1}$ , so wäre ganz oben die $10000=10^4$ zu finden.

Geraden auf diesem Papier haben die Gleichung log y = m·x + c, wobei die Basis des Logarithmus unwichtig ist, bei der weiteren Rechnung aber als natürlicher Logarithmus angenommen wird.

Aufgelöst nach y ergibt sich:

$y = e^{m \cdot x + c} = e^c \cdot e^{m \cdot x} = e^c \cdot (e^m)^x$

Mit $A = e^c$ und $B = e^m$ folgt

$y = A \cdot B^x$

Exponentialfunktionen (ohne additive Konstanten) ergeben also als Graph auf einfach-logarithmischem Papier Geraden.

Die multiplikative Konstante $A = e^c$ lässt sich einfach bestimmen: c ist der y-Achsenabschnitt. Auf der y-Achse liest man $\ln y = \ln e^c = c$ direkt als Zahlenwert ab.

Im nebenstehenden Beispiel gilt also A = 3.

Zur Bestimmung von B betrachtet man das grüne Steigungsdreieck: Es gilt

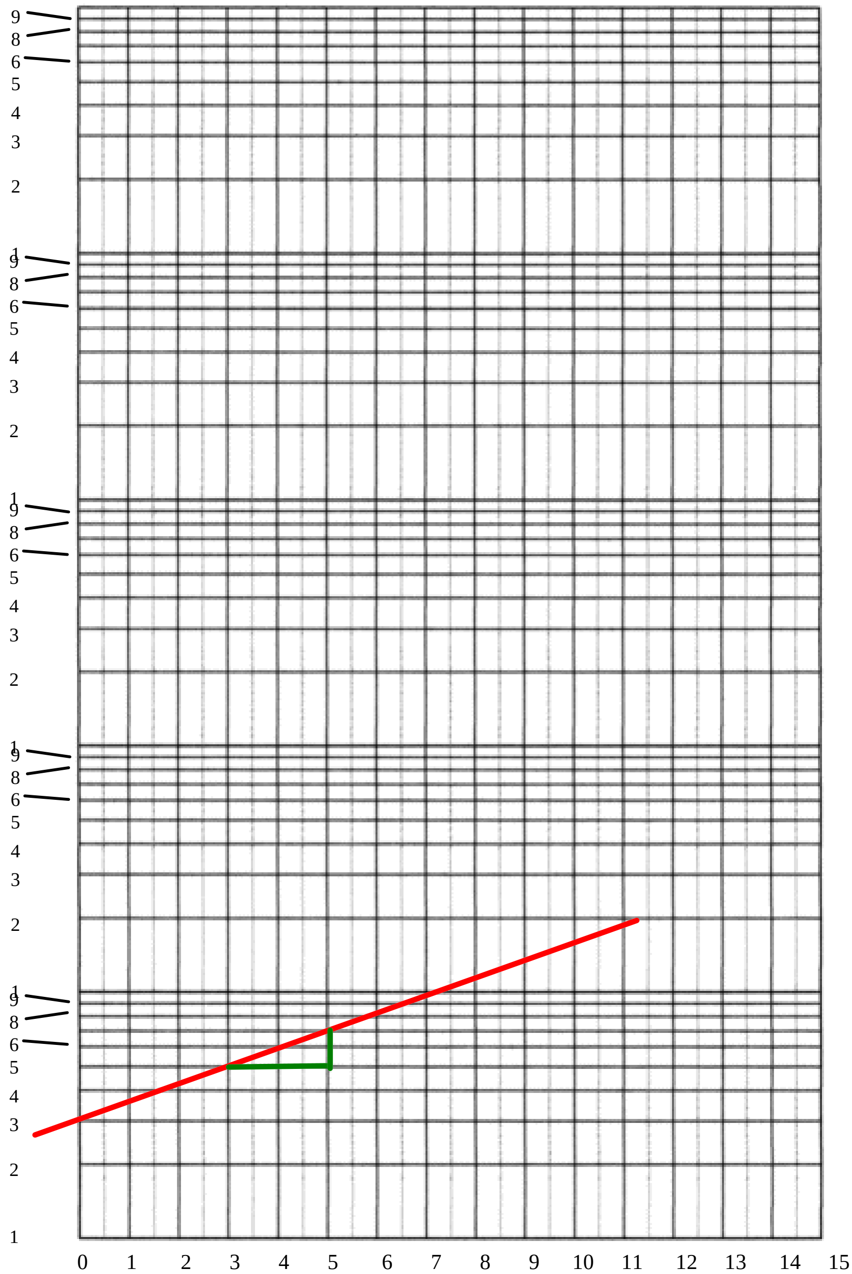
$$m = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

$$= \ln\left(\sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}\right)$$

Damit gilt

$$B = e^m = e^{\ln\left(\sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}\right)} = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$



einfach-logarithmisches Papier

Im nebenstehenden Beispiel gilt

$y_2 = 7$ , $y_1 = 5$ , $x_2 = 5$ , $x_1 = 3$ , also $x_2 - x_1 = 2$ und damit $B = \sqrt[2]{\frac{7}{5}} \approx 1{,}183$

Die Funktionsgleichung heißt also $y = 3 \cdot 1{,}183^x$ .

**Doppelt-logarithmisches Papier**

Hier sind die waagrechte <u>und</u> die senkrechte Achse logarithmisch unterteilt.

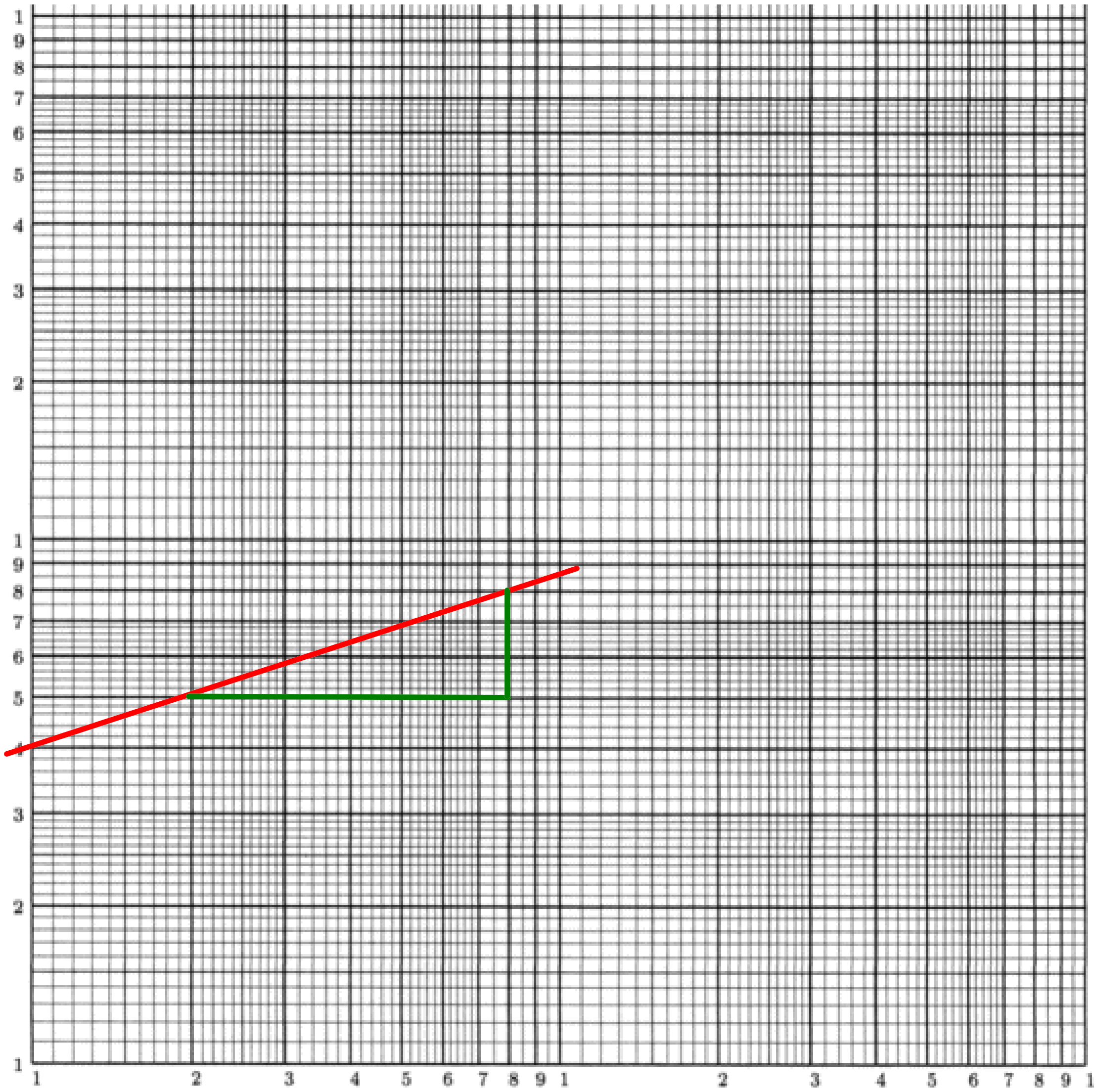
Geraden auf diesem Papier haben die Gleichung $\log y = m \cdot \log x + c$, wobei die Basis des Logarithmus unwichtig ist, bei der weiteren Rechnung aber als natürlicher Logarithmus angenommen wird.

Aufgelöst nach y ergibt sich:

$y = e^{m \cdot \ln x + c} = e^c \cdot e^{m \cdot \ln x} = e^c \cdot e^{\ln x^m} = e^c \cdot x^m$

Mit $A = e^c$ und $B = m$ folgt $y = A \cdot x^B$, d.h. Geraden auf diesem Papier gehören zu Potenzfunktionen der Art $y = A \cdot x^B$.

Auch hier soll ein Beispiel zeigen, wie man die Konstanten A und B aus der Zeichnung bestimmt.




doppelt-logarithmisches Papier

Auf der y-Achse liest man ln y = ln $e^c$ = c = A direkt als Zahlenwert ab, in diesem Fall also 4.

B = m ist hier einfach die Steigung der Geraden, bestimmt in beliebigen Einheiten. Mit dem grünen Steigungsdreieck ergibt sich m = 0,338, d.h. die zu Grunde liegende Funktion hat die Gleichung

$y = 4 \cdot x^{0,338}$ .