Quadrat-Wurzel aus einer komplexen Zahl

Die Wurzel aus einer komplexen Zahl ist wieder eine komplexe Zahl.

Ansatz: $\sqrt{a+b\cdot i}=c+d\cdot i$ mit $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

Gesucht sind also die Werte für c und d in Abhängigkeit von a und b.

Quadrieren: $a+b\cdot i=(c+d\cdot i)^2=c^2+2cd\cdot i+d^2\cdot i^2\overset{i^2=-1}{=}c^2+2cd\cdot i-d^2=(c^2-d^2)+2cd\cdot i$

Koeffizientenvergleich: $a=c^2-d^2$ und $b=2cd$

Umformen: $b=2cd\ \rightarrow\ d=\frac{b}{2c}\ \rightarrow\ a=c^2-d^2=c^2-\frac{b^2}{4c^2}\ \rightarrow\ ac^2=c^4-\frac{b^2}{4}\ \rightarrow\ c^4-ac^2-\frac{b^2}{4}=0$

Substitution: $c^2=z\ \rightarrow\ z^2-a\cdot z-\frac{b^2}{4}=0\ \rightarrow\ z_{1,2}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}=\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

Da z positiv sein muss, gilt $z=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

Resubstitution: $z=c^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\ \rightarrow\ c_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$

d berechnen: $b=2c\cdot d\ \rightarrow\ d=\frac{b}{2c}\ \rightarrow\ d_{1,2}=\frac{b}{\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}$

Ergebnis:

$$\sqrt{a+b\cdot i}=c+d\cdot i=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\pm\frac{b}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}}\cdot i=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm\frac{b}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}}\cdot i$$

Mit folgender Umformung ergibt sich ein noch "schöneres" Ergebnis:

$$\frac{b}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}}=\frac{b\cdot\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}\cdot\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}\overset{\text{3. Bin. Formel}}{=}\frac{b\cdot\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2-a^2}}=\frac{b\cdot\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{2}\cdot|b|}=sgn\,b\frac{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{\sqrt{2}}$$

"Schöneres" Ergebnis: $\sqrt{a+b\cdot i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm sgn(b)\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\cdot i\right)$

$sgn(b)$ bedeutet "Vorzeichen von b"
Beim Wurzelziehen im Nenner wird das b garantiert positiv, das Vorzeichen von b im Zähler bleibt aber erhalten.

Es gibt 2 Lösungen, eine mit 2-mal "+" und eine mit 2-mal "-"