Hilfsmittel: Kontinuitätsprinzip

Das Wesen mathematischer Forschung besteht vielfach darin, mit Hilfe bekannter Erkenntnisse neue Erkenntnisse zu gewinnen. Dabei ist wichtig, dass schon gefundene Gesetzmäßigkeiten erhalten bleiben und sich das Neue nahtlos an das Alte anfügt.

Wichtig: In den Beispielen werden keine Beweise geführt, sondern ausschließlich Berechnungen gezeigt, die Definitionen in der Mathematik veranschaulichen sollen.

Beispiel 1: Erweiterung des Zahlbereichs der ganzen Zahlen zum Zahlbereich der rationalen Zahlen (Brüche)

Beim Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren von ganzen Zahlen erhält man immer wieder ganze Zahlen. Bei der Division ist das in der Regel nicht so: Die Division $3:4=\frac{3}{4}$ ergibt z. B. keine ganze Zahl, sondern den "Bruch" $\frac{3}{4}$.

Was bedeutet aber dieser "Bruch"? Ist das eine "Zahl"?

Das Divisionszeichen wurde im Laufe der Zeit unterschiedlich geschrieben: **:** oder **/** oder **-**

Es gilt also $3:4=3/4=\frac{3}{4}$, d. h. $\frac{3}{4}$ ist eigentlich gar keine Zahl, sondern eine Rechenaufgabe: Man soll 3 in 4 gleiche Teile aufteilen. Da wir für das Ergebnis aber keine (ganze) Zahl haben, schreiben wir einfach die Rechenaufgabe hin und tun so, als sei das eine Zahl, für die wir dann Rechenregeln finden müssen.

Diese neuen Zahlen haben die Gestalt $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$, wobei "Nenner" angibt, in wie viel gleiche Teile ein Ganzes zerlegt wird und "Zähler" angibt, wie viele dieser Teile es gibt.

Damit die ganzen Zahlen kompatibel zu den neuen Zahlen sind, müssen sie auch im Schema $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$ geschrieben werden. Da ganze Zahlen n aus einem Teil bestehen, werden sie nun als $\frac{n}{1}$ geschrieben. Aus $3+4=7$ wird also $\frac{3}{1}+\frac{4}{1}=\frac{7}{1}$ und

allgemein aus $a+b=c$ wird $\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\frac{c}{1}$ mit dem Zwischenergebnis $\frac{a+b}{1}$.

Daraus ergibt sich die Rechenregel $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}=\frac{c}{n}$, wenn man Brüche mit gleichem Nenner addiert. Dass man bei ganzen Zahlen den Nenner 1 weg lässt, also 5 statt $\frac{5}{1}$ schreibt, ist nur eine Vereinfachung.

Da nur eine Addition von Brüchen mit gleichem Nenner definiert ist, muss man Brüche vor der Addition auf den gleichen Nenner bringen, bevor man sie addieren kann.

Beispiel 2: Multiplikation von ganzen Zahlen

Multipliziert man zwei ganze Zahlen, so gelten die
Vorzeichenregeln "(+) · (+) = (+)" ; "(+) · (-) = (-)" ; "(-) · (+) = (-)" ; "(-) · (-) = (+)"

Warum ist das so? Im folgenden linken Rechenbeispiel wir der 2. Faktor immer um 1 verkleinert. Das Ergebnis wird dann immer um 4 verkleinert. Setzt man den Vorgang solange fort, bis der 2. Faktor negativ wird, wird auch das Ergebnis negativ. Es gilt also (+)·(-)=(-)

$(+4)\cdot(+3)=(+12)$	$(+3)\cdot(+4)=(+12)$	$(-4)\cdot(+3)=(-12)$
$(+4)\cdot(+2)=(+8)$	$(+2)\cdot(+4)=(+8)$	$(-4)\cdot(+2)=(-8)$
$(+4)\cdot(+1)=(+4)$	$(+1)\cdot(+4)=(+4)$	$(-4)\cdot(+1)=(-4)$
$(+4)\cdot(\pm 0)=(\pm 0)$	$(\pm 0)\cdot(+4)=(\pm 0)$	$(-4)\cdot(\pm 0)=(\pm 0)$
$(+4)\cdot(-1)=(-4)$	$(-1)\cdot(+4)=(-4)$	$(-4)\cdot(-1)=(+4)$
$(+4)\cdot(-2)=(-8)$	$(-2)\cdot(+4)=(-8)$	$(-4)\cdot(-2)=(+8)$
(+) · (-) = (-)	(-) · (+) = (-)	(-) · (-) = (+)

Die rechts stehenden Rechenbeispiele führen zu den anderen Rechenregeln.

Beispiel 3: Negative Hochzahlen bei Potenzen

Die Potenz 4^3 bedeutet, dass man die 4 dreimal mit sich selbst multiplizieren muss:
$4^3=4\cdot 4\cdot 4=64$. Allgemein: $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n-\text{mal der Faktor } a}$.

Diese Definition ist damit eigentlich nur dann sinnvoll, wenn mindestens 2 Faktoren vorhanden sind (Beispiel: $3^2=3\cdot 3=9$).

Was könnte denn wohl der Wert für n=1, n=0 oder n<0 sein?

In den folgenden Gleichungen wird von Zeile zu Zeile der Exponent um 1 verkleinert und damit das Ergebnis jedes mal durch 3 dividiert:

Exponent -1 ; Ergebnis :3

$$3^4=81$$
$$3^3=27$$
$$3^2=9$$
$$3^1=3$$
$$3^0=1$$
$$3^{-1}=\frac{1}{3}$$
$$3^{-2}=\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}$$
$$3^{-3}=\frac{1}{27}=\frac{1}{3^3}$$
$$3^{-4}=\frac{1}{3^4}$$

allgemein mit Brüchen

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=\frac{p^2}{q^2}$$
$$\left(\frac{p}{q}\right)^1=\frac{p^1}{q^1}=\frac{p}{q}$$
$$\left(\frac{p}{q}\right)^0=\frac{p^0}{q^0}=\frac{1}{1}=1$$
$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{p^1}{q^1}}=\frac{q^1}{p^1}=\frac{q}{p}$$
$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)^2}=\left(\frac{q}{p}\right)^2$$
$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)^3}=\left(\frac{q}{p}\right)^3$$

Rechenregel:
Potenz mit negativer Hochzahl ist Kehrwert der Potenz mit positiver Hochzahl.

Beispiel 4: Potenz mit einem Bruch als Exponent

Dividiert man bei einer Potenz den Exponenten durch 2, so muss man aus dem Wert der Potenz die (Quadrat-)Wurzel ziehen.

Beispiel:

$$3^4=81 \xrightarrow{4\ \textit{dividiert durch}\ 2\ \textit{ist}\ 2\ ;\ \textit{Wurzel aus}\ 81\ \textit{ist}\ 9} 3^2=\sqrt{81}=9$$

$$a^{2n}=b^2 \rightarrow a^{\frac{2n}{2}}=a^n=\sqrt{b^2}=b \text{ , denn } b^2=b\cdot b=a^n\cdot a^n=a^{n+n}=a^{2n}$$

Um herauszufinden, wie man sinnvoll eine Potenz mit Bruch als Exponent definiert, führt man die gezeigte Rechnung mehrfach aus:

links: Exponent jeweils dividiert durch 2 rechts: Wurzel aus dem Ergebnis

$3^8=6561$	$(2^3)^8=8^8=16777216$
$3^4=\sqrt{6561}=81$	$(2^3)^4=8^4=\sqrt{16777216}=4096$
$3^2=\sqrt{81}=9$	$(2^3)^2=8^2=\sqrt{4096}=64$
$3^1=\sqrt{9}=3$	$(2^3)^1=8^1=\sqrt{64}=8$
$3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$	$(2^3)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=\left(\sqrt{2}\right)^3$
$3^{\frac{1}{4}}=\sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}$	$(2^3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}=\sqrt{\sqrt{2^3}}=\sqrt[4]{2^3}=\left(\sqrt[4]{2}\right)^3$
$3^{\frac{1}{8}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}=\sqrt{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[8]{3}$	$(2^3)^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{3}{8}}=\sqrt{\left(\sqrt[4]{2}\right)^3}=\sqrt[8]{2^3}=\left(\sqrt[8]{2}\right)^3$

Allgemein gilt $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ und $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}=\left(\sqrt[q]{a}\right)^p$

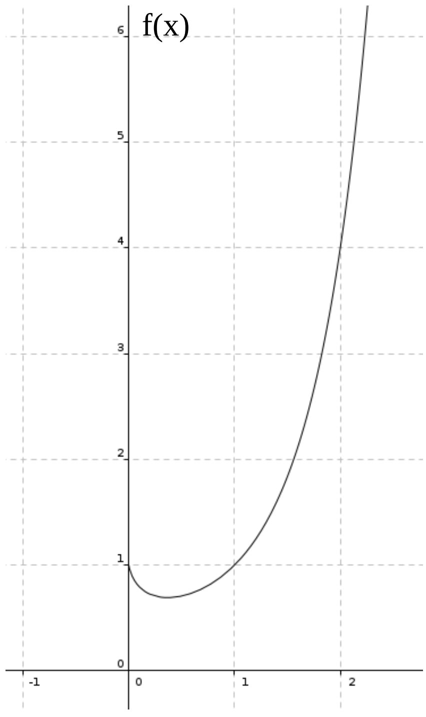
Beispiel 5: Grenzwerte

Was ist eigentlich der Wert von 0^0 ?

$3^0=1$	$0^3=0\cdot 0\cdot 0=0$
$2^0=1$	$0^2=0\cdot 0=0$
$1^0=1$	$0^1=0$
$0^0=1$	$0^0=0$

Die erste Rechenfolge scheint zu zeigen, dass $0^0=1$.
Die rechte Rechenfolge führt aber zu $0^0=0$

Da $1\neq 0$, sagt man, dass 0^0 keinen definierten (festgelegten) Wert hat.
Wenn man aber bei der Potenz a^b sowohl a als auch b zu 0 werden lässt, geht der Trend des Ergebnisses möglicherweise gegen einen festen Wert.



Beispiel: Rechts sind für den Fall f(x) = x^x die Werte für die Punkte mit den Koordinaten (x/f(x)) gezeichnet. Wenn x gegen 0 geht, geht also hier f(x) gegen 1.

Man schreibt $\lim\limits_{x\rightarrow 0} x^x=1$. "lim" steht dabei für "Limes". Das war der römische <u>Grenz</u>wall in Süddeutschland.

Beispiel 6: Fakultät

Vor allem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung müssen oft Produkte von natürlichen Zahlen berechnet werden.

Man benutzt deshalb eine abkürzende Schreibweise.
Zum Beispiel wird das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ durch $7!$ beschrieben.
Ausgesprochen wird es "7 Fakultät".

Allgemein gilt: Die Fakultät einer natürliche Zahl n ist definiert durch $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Bei Berechnungen kommen nun auch die Fakultäten $1!$ und $0!$ vor.
Da die Definition einer Fakultät durch ein Produkt gegeben ist, gehören mindestens zwei Faktoren zur Berechnung. Das geht aber bei $1!$ und $0!$ nicht.

Auch hier hilft das Kontinuitätsprinzip:

$$
\begin{array}{lcc}
5! & = & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\
4! & = & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\
3! & = & 1 \cdot 2 \cdot 3 \\
2! & = & 1 \cdot 2 \\
1! & = & 1 \\
0! & = & 1
\end{array}
$$

Links erniedrigt sich die Zahl vor dem Ausrufezeichen um 1 (also -1), rechts wird durch die größte beteiligte Zahl dividiert (also $:n$).

Damit erhalten wir $0! = 1$ und $1! = 1$.

Da man nicht durch 0 dividieren kann, gibt es keine Fakultät von -1 und generell nicht von allen ganzen negativen Zahlen.

Weitere Informationen zu Fakultäten gibt es z.B. bei Wikipedia unter "Fakultät_(Mathematik)".