Vektoren in der Physik

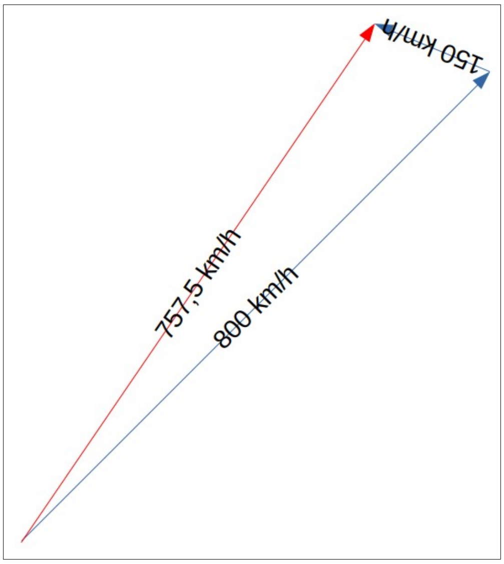
In diesem Jahr (2020) spüren wir eindrücklich, wie schwierig es für uns Menschen ist, in dieser Welt bestehen zu können, wenn wir vor ein völlig neues Problem gestellt werden. Das Corona-Virus war unbekannt und der Umgang mit ihm (Vorsichtsmaßnahmen, Bekämpfung) musste erst erforscht und gelernt werden. Einfache Antworten gibt es nicht, das Problem ist äußerst komplex.

Seit die Menschen ihre Umwelt verstehen wollten, hatten sie immer dieses Problem. Einzelne Phänomene lassen sich nur selten auf einfache Art erklären, oft sind viele Parameter zu beachten. Und eine letztendliche "Wahrheit" kann man in Bezug auf die Natur mit wissenschaftlichen Mitteln nicht erreichen (und mit unwissenschaftlichen Mitteln erst recht nicht!).

In der Physik versucht man daher, Dinge so zu vereinfachen, dass man einen möglichst einfachen Zugang zu ihnen bekommt. Dazu gehört unter anderem, das Bezugssystem, also das System, aus dem man einen Vorgang betrachtet, so zu wählen, dass die mathematische Beschreibung des Vorgangs möglichst einfach wird. Die beiden folgenden Beispiele sollen zeigen, wie man dazu Vektoren benutzen kann, die in der Physik hauptsächlich durch Pfeile repräsentiert werden.

Beispiel 1: Fliegen mit starkem Seitenwind

Ein Flugzeug fliegt mit der Geschwindigkeit $800\frac{km}{h}$ in Richtung NO. Dabei weht ständig ein Seitenwind aus OSO mit der Geschwindigkeit $150\frac{km}{h}$. Man zeichnet nun Pfeile mit den Längeneinheiten 800 und 150 mit den Richtungen des Flugzeuges und des Windes und setzt die beiden Pfeile aneinander (Anfang des zweiten Pfeils an die Spitze des ersten Pfeils). Dann gibt der Verbindungspfeil vom Anfang des ersten Pfeils zur Spitze des zweiten Pfeils (rot) die durch den Wind erzwungene Richtung des Flugzeuges und dessen Geschwindigkeit (in Längeneinheiten des Ergebnispfeils) an. Den Wert kann man näherungsweise aus der Zeichnung ablesen.



Die Idee bei der Lösung dieser Aufgabe besteht darin, getrennt zu ermitteln, welchen Weg das Flugzeug ohne Seitenwind in einem bestimmten Zeitraum zurücklegt und wie weit sich in dieser Zeit der Wind bewegt. Die beiden Bewegungen "behindern" sich nicht gegenseitig.

Das Gute an der einfachen Konstruktion ist, dass außer den beiden gegebenen Größen (Geschwindigkeit und Richtung) alle weiteren möglichen Einflüsse ausgeschlossen werden, z. B. auch, ob sich das Flugzeug im Steigflug befindet.

Beispiel 2: Bewegungen im 3-dimensionalen Raum

Während geradlinige Bewegungen im 1-dimensionalen Raum (Fahren auf gerader Autobahn) einfach durch eine einzige Angabe zu beschreiben sind ("Kilometersteine"), benötigt man für die Bewegung eines Flugzeuges im 3-dimensionalen Raum drei Größen (beispielsweise x-, y-und z-Komponente). Um die Beschreibung zu vereinfachen, könnte man einfach ein anderes 3-dimensionales Koordinatensystem benutzen, bei dem die x-Achse in Richtung des Flugzeuges zeigt. Diesen "Trick" nennt man Koordinatentransformation. Rechnerisch wird das auf einfachem Weg durch Benutzung von Vektoren erreicht. Startet das Flugzeug z. B. bei x=2, y=1, z=0 und bewegt sich in einer Zeiteinheit um 6 Einheiten in x-Richtung, -3 Einheiten in y-Richtung und 4 Einheiten in z-Richtung, so kann man den Ort des Flugzeuges zu jeder Zeit durch einen Vektor $\vec{s}$ in Abhängigkeit von der Zeit t beschreiben:

$$\vec{s}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+6\cdot t\\1-3\cdot t\\0+4\cdot t\end{pmatrix}.$$

Der erste Vektor $\vec{s}_0=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ heißt Ortsvektor und gibt den Startpunkt an, der zweite Vektor

$\vec{v}=\begin{pmatrix}6\\-3\\4\end{pmatrix}$ ist der Richtungsvektor, der die Bewegungsrichtung und durch seine Länge

$\sqrt{6^2+(-3)^2+4^2}=\sqrt{36+9+16}=\sqrt{61}\approx 8$ die Geschwindigkeit v angibt.

Durch Einsetzen eines t-Wertes erhält man dann einen Vektor $\vec{s}=\vec{s}_0+t\cdot\vec{v}$ mit 3 Zahlenwerten, die die aktuellen Koordinaten des Flugzeuges angeben. Das 3-dimensionale Problem ist also im Wesentlichen auf ein 1-dimensionales Problem vereinfacht worden.

Wie leistungsfähig das Verfahren ist, lässt sich vielleicht an folgendem Rechenbeispiel verdeutlichen, bei dem es darum geht, ob eine schnell fliegende Militärmaschine mit dem Flugzeug auf Kollisionskurs ist:

Für die Militärmaschine soll gelten $\vec{m}=\begin{pmatrix}6\\-11\\8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}8\\6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+8\cdot t\\-11+6\cdot t\\8+0\cdot t\end{pmatrix}$

Setzt man bei $\vec{s}$ für t den Wert 2 ein und bei $\vec{m}$ für t den Wert 1, so erhält man in beiden Fällen den gleichen Vektor $\vec{s}=\vec{m}=\begin{pmatrix}14\\-5\\8\end{pmatrix}$. Beide Flugzeuge sind also im selben Raumpunkt anzutreffen. Da aber die t-Werte unterschiedlich sind, befinden sich die Flugzeuge zu unterschiedlichen Zeiten an dieser Stelle, kollidieren also nicht miteinander.

In der Physik kennzeichnet man alle Größen, die eine Richtung haben (Weg, Geschwindigkeit, Kraft, Feldstärke usw.) durch Vektoren. Müssen diese Größen additiv miteinander verknüpft werden, kann man einfach die Vektoren addieren bzw. die zugehörigen Pfeile aneinander hängen, ganz gleich, wie kompliziert die Richtung im 3-dimensionalen Raum auch sein mag.

Ein Beispiel soll das zeigen:

Am Fuße eines hohen Turmes wird der Nullpunkt (0/0/0) eines Koordinatensystems festgelegt. Oben auf dem Turm wird in der Höhe 15m, 2m östlich und 1m nördlich bezogen auf den Nullpunkt ein Ball mit etwas mehr als $10\frac{m}{s}$ abgeschossen, wobei er sich zu Beginn mit $3\frac{m}{s}$ in östliche Richtung, mit $1\frac{m}{s}$ in südliche Richtung und mit $10\frac{m}{s}$ nach oben bewegt.

Dazu gehört folgende Vektorgleichung: $\vec{s}=\begin{pmatrix}2\\1\\15\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\10\end{pmatrix}$.

Das Fallen des Balles wird nach der Bewegungsgleichung $s=-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2\approx -5\cdot t^2$ durch den Vektor $\vec{f}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t^2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix}$ beschrieben.

Der Orstvektor $\vec{b}$ des Balles, der vom Nullpunkt zum aktuellen Ort des Balles zeigt, ergibt sich dann aus

$$\vec{b}=\vec{s}+\vec{f}=\begin{pmatrix}2\\1\\15\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t^2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\15\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\10\end{pmatrix}+t^2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3\cdot t\\1-t\\15+10\cdot t-5\cdot t^2\end{pmatrix}$$

Wenn man wissen möchte, wo der Ball auf dem Erdboden aufschlägt, macht man den Ansatz $\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ und erhält aus $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3\cdot t\\1-t\\15+10\cdot t-5\cdot t^2\end{pmatrix}$ die drei Gleichungen $x=2+3\cdot t$, $y=1-t$ und
$0=15+10\cdot t-5\cdot t^2$

Daraus folgt nach Division mit -5: $t^2-2\cdot t-3=0 \rightarrow t_{1,2}=1\pm\sqrt{1^2+3}=1\pm\sqrt{4}=1\pm 2$

Sinnvoll ist nur die Lösung mit + : $t=1+2=3$.

Das heißt, dass der Ball 3 Sekunden lang fliegt, bis er unten auftrifft.
Die Ortskoodinaten ergeben sich aus
$x=2+3\cdot t=2+3\cdot 3=2+9=11$ und
$y=1-t=1-3=-2$.
Der Ball trifft also 11 m in östlicher Richtung und 2 m in südlicher Richtung vom Turm aus auf dem Boden auf.