Formeln in der Physik

Unsere Welt ist so komplex, dass wir strategisch herangehen müssen, um verlässliche Ergebnisse über deren Eigenschaften zu erhalten. In der Physik macht man dazu Versuche in isolierter Umgebung (alles konstant lassen, nur eine Größe verändern, Auswirkung auf eine andere Größe registrieren) und fasst die Ergebnisse in Formeln zusammen (=Mathematisieren). Die Mathematisierung erlaubt dann, mit Hilfe von Berechnungen Vorhersagen über das Verhalten der Natur zu machen.

Da unter verschiedenen Bedingungen unterschiedliche Effekte auftreten können, sind die gefundenen Formeln immer nur als vorläufig anzusehen und müssen immer wider kritisch hinterfragt werden.[1]

Im Folgenden soll an Beispielen gezeigt werden, wie man Formeln finden kann und wie man sie benutzt, um auf theoretischem Weg neue Erkenntnisse zu gewinnen.[2]

Formeln finden - Proportionalitäten finden

Geschwindigkeit:

Man beobachtet einen Körper, der sich ohne Einwirkung irgendeiner äußeren Kraft vorwärts bewegt. Er wird also weder schneller noch langsamer. Man beobachtet seinen Ort zu verschiedenen Zeiten, also nur die Zeit wird verändert, alle anderen Einflussfaktoren werden ausgeschlossen. Dann sieht man, dass der zurückgelegt Weg s sich "genau so" ändert wie die vergangene Zeit t. Bei doppelter, dreifacher, n-facher, halber Zeit ist der zurückgelegte Weg doppelt, dreifach, n-fach, halb so lang.
"genau so" präzisiert man durch den mathematischen Begriff "proportional" und schreibt vereinfacht $s \sim t$ (sprich: s ist proportional zu t).
Um mit dieser Beziehung rechnen zu können, wandelt man die Proportionalitätsbeziehung zu einer Gleichung um: $s=v \cdot t$ Für v setzt man einen Zahlenwert mit Einheiten ein, so dass die Gleichung richtig wird. Schafft ein Mensch in einer Sekunde die Strecke 2 Meter, so gilt

Zeit t in Sekunden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Strecke s im Meter	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Umformung der Gleichung ergibt: $s=v \cdot t \rightarrow v=\frac{s}{t}$

Für alle Wertepaare aus der Tabelle ergibt sich $v=\frac{s}{t}=2\frac{m}{s}$.

Die beobachtete Bewegungsart nennt man geradlinig-gleichförmige Bewegung und v nennt man Geschwindigkeit.

Proportionalitäten treten sehr häufig bei physikalischen Fragestellungen auf.

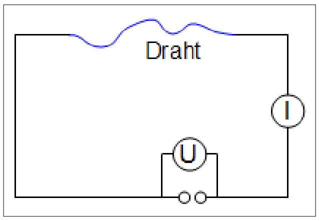
1 Wichtig: Diese Aussage wird leider oft falsch derart interpretiert, dass man physikalische Ergebnisse als "beliebig" ansieht. Dabei ist gerade das fortwährende Überprüfen, Korrigieren und Ergänzen der gefundenen Ergebnisse die beste Sicherheit dafür, die gefundenen Ergebnisse näher an die "Wahrheit" heran zu bringen, auch wenn letztendliche Wahrheit niemals erreicht werden kann. Wenn man sich einmal klar macht, dass die gesamte Technik auf physikalischen Erkenntnissen fußt, wird man sehen, dass die Erkenntnisse der Physik so falsch wohl doch nicht sein können.

2 Wichtig: Alle theoretischen Erkenntnisse müssen in Versuchen genauestens untersucht und bestätigt werden, bevor man sie als gesichert ansehen darf.

Federkonstante:

Hängt man an eine Schraubenfeder verschiedene Massestücke mit der Gewichtskraft F an, so verlängert sich die Schraubenfeder jeweils um eine Strecke s.
Man findet heraus (Hookesches Gesetz), dass $F \sim s$, also dass die Gewichtskraft proportional zur Verlängerung ist.
Aus der Proportionalitätsgleichung wird die Gleichung $F = D \cdot s$ erstellt.
Die Proportionalitätskonstante D nennt man Federhärte.
Bei weichen Federn, die sich leicht verformen lassen, ist der Wert von D klein, ist die Feder hart - man kann die Feder dann nicht so gut verformen - , so ist der Wert von D groß.

Widerstand:



Betreibt man einen Stromkreis (Draht aus Konstantan) mit verschiedenen Spannungen U (in Volt V), so misst man unterschiedliche Stromstärken I (in Ampere A).
Man findet $U \sim I$, Spannung und Stromstärke sind proportional zueinander (Ohmsches Gesetz).

Umwandeln dieser Beziehung in eine Gleichung: $U = R \cdot I \rightarrow R = \frac{U}{I}$

R mit der Einheit Ohm $\Omega = \frac{V}{A}$ nennt man elektrischen Widerstand.

Fließt bei einer konstanten Spannung ein Strom großer Stromstärke, so ist der Widerstand klein, fließt Strom einer geringen Stromstärke, so ist der Widerstand groß.

Ist eine Größe proportional zu mehreren anderen Größen, so ist diese Größe proportional zum Produkt aus den anderen Größen. Beispiel:

Luftwiderstandskraft bei Körpern:

Die Luftwiderstandskraft F_L ist proportional zur Querschnittfläche A des Körpers, zur Dichte ρ der umgebenden Luft und zum Quadrat v^2 der Luftgeschwindigkeit:

$$F \sim A \; ; \; F \sim \rho \; ; \; F \sim v^2 \rightarrow F \sim A \cdot \rho \cdot v^2 \rightarrow F = \frac{1}{2} \cdot c_W \cdot A \cdot \rho \cdot v^2$$

Anmerkung: Neben diesem einfachen Zusammenhang gibt es natürlich auch noch andere Abhängigkeiten, die aber generell auch als Proportionalitäten aufgefasst werden können.

Wird die Größe A in Abhängigkeit von der Größe B betrachtet, kann man z. B. auch finden

$$A \sim \frac{1}{B} \; ; \; A \sim B^2 \; ; \; A \sim \sqrt{B} \; ; \; A \sim \frac{1}{\sqrt{B}} \; ; \; A \sim \sin(B)$$

Formeln benutzen - Gleichungen umformen

Bevor man eine Formel zur Berechnung benutzt, muss man kontrollieren, ob die Formel auf den aktuellen Vorgang anzuwenden ist.

Es gibt z. B. häufig genutzte verschiedene Gleichungen, mit denen man die Länge s, die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a bei einer Bewegung berechnen kann:

Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v: $s=v\cdot t$ $v=const.$ $a=0$

Bewegung mit konstanter Beschleunigung a: $s=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$ $v=a\cdot t$ $a=const.$

Aufgabe:
Ein Badegast lässt sich vom 10m-Brett nach unten fallen. Wie lange dauert es, bis er auf der Wasseroberfläche ankommt?

Lösung:

Es handelt sich um eine beschleunigte Bewegung mit der Erdbeschleunigung $a=g\approx 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$.

Bekannt ist die Fallstrecke $s=10\,m$. Gesucht ist die Zeit t.

Man sucht nun die Formel, in der alle Größen bis auf die gesuchte Größe bekannt sind.
Dann formt man die Gleichung um, bis die gesuchte Größe allein auf einer Seite der Gleichung steht.

Von den angegebenen Formeln passt nur die linke Gleichung für die Bewegung mit konstanter Beschleunigung:

$$s=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \overset{a=g}{=} \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \overset{umformen}{\rightarrow} t^2=\frac{2\cdot s}{g} \rightarrow t=\sqrt{\frac{2\cdot s}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 10\,m}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}}=\sqrt{\frac{20}{9{,}81}}s\approx 1{,}43\,s$$

Manchmal reicht eine Formel nicht aus, um das gewünschte Ergebnis zu erhalten.
Dann müssen mehrere Formeln so kombiniert werden, dass sich eine Gleichung ergibt, die außer der gesuchten Größe nur bekannte Größen enthält.

Aufgabe:

Nach welcher Fallstrecke beträgt die Geschwindigkeit des Turmspringers $5\frac{m}{s}$?

Lösung:

Gegeben sind die Beschleunigung $a=g=9{,}81\frac{m}{s^2}$ und die Geschwindigkeit $v=5\frac{m}{s}$.

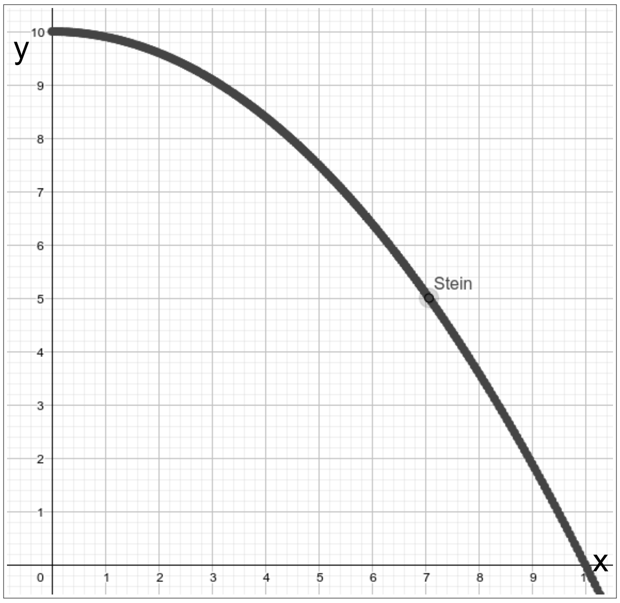
Gesucht ist die Strecke s. In Frage kommen also die Gleichungen $s=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$ und $v=a\cdot t$.

Der erste Lösungsschritt besteht nun darin, Größen, die weder gegeben noch gesucht sind (hier die Zeit t), aus den Gleichungen zu entfernen. Dazu bieten sich die aus dem Mathematikunterricht bekannten Methoden "Gleichsetzungsverfahren" und "Einsetzungsverfahren" beim Lösen von Gleichungssystemen an:

$$v=a\cdot t \rightarrow t=\frac{v}{a} \rightarrow s=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{v}{a}\right)^2=\frac{1\cdot a\cdot v^2}{2\cdot a^2}=\frac{v^2}{2\cdot a}=\frac{v^2}{2\cdot g}=\frac{25\frac{m^2}{s^2}}{2\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}\approx 1{,}27m$$

Aufgabe:

Mit welcher Geschwindigkeit muss ein Stein von einem h=10m hohen Turm waagrecht abgeworfen werden, damit er am Erdboden 10m vom Turm entfernt auftrifft?



Lösung:

Achtung: Hier liegen verschiedene Bewegungsarten in waagrechter und senkrechter Richtung vor!

In x-Richtung ist die Geschwindigkeit konstant. Es gelten also folgende Formeln: $s_x=v_x\cdot t_x$ und $v_x=const.$

In y-Richtung ist die Beschleunigung konstant. Es gelten also folgende Formeln:

$s_y=h-\frac{1}{2}\cdot a\cdot t_y^2$ (zur Zeit t=0s hat s_y den Wert h=10m) ; $v_y=a\cdot t_y$; $a=g$

Gegeben sind $s_x=10m$; $s_y=0m$ (Zielpunkt ist auf dem Erdboden) ; $a=g=9{,}81\frac{m}{s^2}$

Gesucht ist v_x

Für den Stein gilt, dass t_x und t_y immer denselben Wert haben (die Zeit vergeht in beide Richtungen gleich schnell). Also gilt $t=t_x=t_y$. t ist nicht gegeben und wird nicht gesucht. Also muss t aus den Gleichungen entfernt werden:

$$s_x=v_x\cdot t \rightarrow t=\frac{s_x}{v_x} \rightarrow s_y=h-\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2=h-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{s_x}{v_x}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{s_x}{v_x}\right)^2=h-s_y \rightarrow$$

$$\left(\frac{s_x}{v_x}\right)^2=\frac{2\cdot(h-s_y)}{a} \rightarrow \frac{s_x}{v_x}=\sqrt{\frac{2\cdot(h-s_y)}{a}} \rightarrow \frac{v_x}{s_x}=\sqrt{\frac{a}{2\cdot(h-s_y)}} \rightarrow v_x=s_x\cdot\sqrt{\frac{a}{2\cdot(h-s_y)}} \rightarrow$$

$$v_x=10m\cdot\sqrt{\frac{9{,}81\frac{m}{s^2}}{2\cdot(10m-0m)}}=10m\cdot\sqrt{\frac{9{,}81\frac{m}{s^2}}{20m}}=10m\cdot\sqrt{\frac{9{,}81\frac{1}{s^2}}{20}}=10\cdot\sqrt{\frac{9{,}81}{20}}\frac{m}{s}\approx 7{,}0\frac{m}{s}$$

Man muss also den Stein mit einer Geschwindigkeit von etwa $7\frac{m}{s}$ werfen.

Lösungsstrategien bei komplexen Physikaufgaben

Die Aufgaben in den bisher angeführten Beispielen sind noch relativ einfach zu lösen, weil die Anzahl der zuständigen Formeln sehr überschaubar ist.

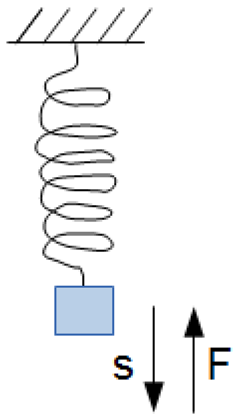
Spätestens im Kurssystem der Oberstufe und dann erst recht im Studium müssen zum Lösen der physikalischen Probleme aber Formeln aus verschiedenen Gebieten der Physik miteinander kombiniert werden. Da kann man leicht den Überblick verlieren.

Dann kann es helfen, sich an Folgendes zu erinnern:

- Welche physikalischen Größen sind gesucht?
- Welche physikalischen Größen sind gegeben?
- Welche physikalischen Bedingungen gelten beim betrachteten Vorgang?
  (konstante Geschwindigkeit? - homogenes Feld? - Quantenmechanik oder klassische Mechanik? - Bezugssystem? - relativistische Betrachtung notwendig? - ...)
- Wähle ein geeignetes Bezugssystem aus!
  (Kartesisches Koordinatensystem, Polarkoordinaten, Kugelkoordinaten, Zylinderkoordinaten, vektorielle Darstellung, ...)
- Gibt es physikalische Größen, die man mit Formeln aus verschiedenen physikalischen Gebieten beschreiben kann und die gleich oder vergleichbar sind?
  (Zeit, Strecke, Kraft, Energie, ...)

Die Antwort zu diesem letzten Punkt ist wichtig und führt oft zielgerichtet zur Lösung. Die Formulierung hört sich etwas kryptisch an und soll deshalb mit einigen Beispielen deutlicher werden.

Schwingung einer Schraubenfeder (siehe Bild auf Seite 2)



Hier hilft es, zwei Kräfte gleichzusetzen:

Nach dem Hookeschen Gesetz ist die Kraft proportional zur Auslenkung. Da die Auslenkung und die Kraft in verschiedene Richtungen zeigen, wird in der Formel ein Minuszeichen gesetzt: $F=-D\cdot s$.

Die Kraft ist identisch mit der Kraft aus dem Newtonschen Kraftgesetz, die zur Beschleunigung der Masse führt: $F=m\cdot a$.

Gleichsetzen der Kräfte und Umformen ergibt eine Differentialgleichung:

$$-D\cdot s=m\cdot a \rightarrow -D\cdot s=m\ddot{s}$$

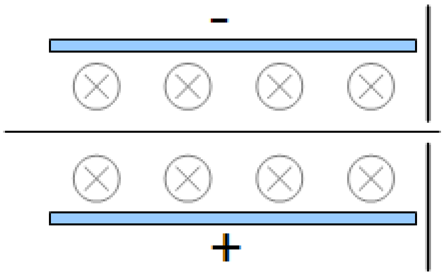
Man kann zeigen[3], dass die Funktion $s(t)=s_M\cdot\sin(\omega\cdot t)$ diese Differenzialgleichung löst. Mit $s''(t)=-s_M\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t)$ gilt

$$-D\cdot s_M\cdot\sin(\omega\cdot t)=-m\cdot s_M\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t) \rightarrow -D=-m\cdot\omega^2 \rightarrow \omega=\sqrt{\frac{D}{m}} \rightarrow$$

$s(t)=s_M\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot t\right)$ beschreibt also die Schwingung einer Schraubenfeder.

3 http://gfs.khmeyberg.de/1516/1516Kurs11ph3/1516UnterrichtPhysik11ph3SchwingungenundWellen.html

Wienfilter[4]

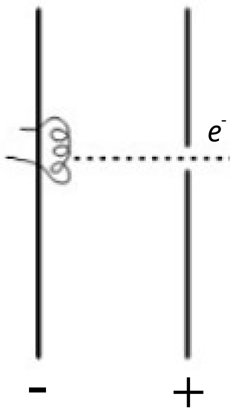


Für manche Anwendungen benötigt man einen Strahl geladener Teilchen, die alle die gleiche Geschwindigkeit besitzen.
Zwischen zwei Kondensatorplatten befindet sich ein homogenes Magnetfeld. Die Feldlinien der Felder kreuzen sich rechtwinklig.
Ein (in der Skizze) negatives Teilchen kommt von links und soll ohne Ablenkung durch den Spalt auf der rechten Seite austreten.
Dazu müssen sich die Kräfte im elektrischen E-Feld und magnetischen B-Feld aufheben:

$$F_E = Q \cdot E \;\; ; \;\; F_B = Q \cdot v \cdot B \;\; ; \;\; F_E = F_B \;\rightarrow\; Q \cdot E = Q \cdot v \cdot B \;\rightarrow\; v = \frac{E}{B}$$

Mit festgelegten Werten für E und B ist eine Geschwindigkeit ausgewählt.
Nur Teilchen mit dieser Geschwindigkeit können den Feldbereich geradlinig durchqueren.
Alle anderen Teilchen werden nach oben oder unten abgelenkt.
Wichtig ist, was nicht in der Formel vorkommt: Auswahlkriterium ist nur die Geschwindigkeit der Teilchen, es kommt nicht auf die Ladung und die Masse der Teilchen an!

Beschleunigung von Elektronen im elektrischen Feld[5]



Elektronen treten aus einer Glühwendel aus. Die Glühwendel ist elektrisch leitend mit der negativ geladenen Platte eines Plattenkondensators verbunden. Die Elektronen werden von der positiv geladenen Platte angezogen und damit beschleunigt. Gefragt ist nach der Geschwindigkeit, die die Elektronen besitzen, wenn sie an der positiv geladenen Platte ankommen.

Hier hilft es, Energien zu betrachten: Die potenzielle Energie des Elektrons beträgt im Kondensators $W_e = e \cdot U$. Diese Energie wird in die kinetische Energie $W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ des Elektrons umgewandelt.

Es gilt also $W_e = W_{kin} \;\rightarrow\; e \cdot U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \;\rightarrow\; v^2 = \frac{2 \cdot e \cdot U}{m} \;\rightarrow\; v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m}}$

Das ist die Geschwindigkeit, die das Elektron beim Austritt aus dem Kondensator besitzt.

4 http://gfs.khmeyberg.de/0910/0910Kurs12Ph3g/0910UnterrichtPhysik12PH3gMagneteld.html

5 http://gfs.khmeyberg.de/Klassenarbeiten-Klausuren/Physik/1011Klausur2Kurs13Ph3g20101202Loesung.pdf