Überblick über Geraden und Geradengleichungen

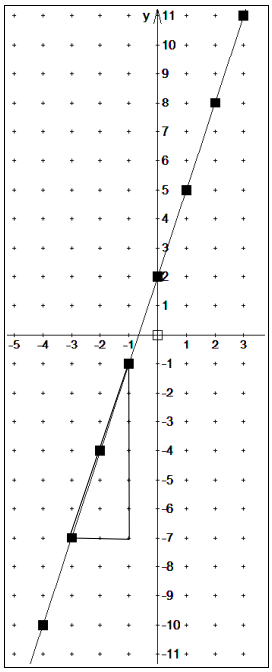
Ändert sich eine Größe um einen bestimmten Faktor und ändert sich dann eine andere Größe um ein Vielfaches dieses Faktors, so sagt man, es liege eine lineare Beziehung zwischen diesen beiden Größen vor und man kann diese Beziehung bildlich durch eine Gerade und symbolisch durch eine Geradengleichung darstellen.

Beispiele sind z. B.

- die Kosten für Gas in Abhängigkeit vom Verbrauch,
- die zurückgelegte Strecke auf der Autobahn in Abhängigkeit von der Zeit (bei gleichmäßiger Geschwindigkeit)

Zahlenbeispiel:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14



Wenn sich der x-Wert um 1 ändert, dann ändert sich der y-Wert um $1 \cdot 3$,
wenn sich der x-Wert um 4 ändert, dann ändert sich der y-Wert um $4 \cdot 3=12$,
wenn sich der x-Wert um n ändert, dann ändert sich der y-Wert um $n \cdot 3$,
d. h. nach dem oben Gesagten ergeben die x- und y-Werte als Punkte in einem Diagramm aufgezeichnet eine Gerade (siehe rechts).

Eine rechnerische Beziehung zwischen den x- und y-Werten ergibt sich z. B. durch Probieren:

Da der y-Wert sich immer um das 3-fache des x-Wertes ändert, probiert man, ob $y=3 \cdot x$ den Zusammenhang richtig wiedergibt:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12

Man sieht, dass die y-Werte alle um 2 zu klein sind und korrigiert deshalb die ausprobierte Gleichung zu $y=3 \cdot x+2$.
Mit dieser Gleichung erhält man die obere Tabelle.
Außerdem ergeben alle möglichen Wertepaare (x/y), die die Gleichung erfüllen (d. h. für die die Gleichung stimmt) alle Punkte auf der Gerade.
Die *Wertetabelle*, die *Geradengleichung* und die *Gerade* beschreiben alle den gleichen linearen Zusammenhang.

Da das Probieren meistens zu aufwändig ist, hat man ein Verfahren entwickelt, das zielgerichtet zum Aufstellen der Geradengleichungen führt:

Zeichnet man sich an die abgebildete Gerade Dreiecke (sogenannte „Steigungsdreiecke“) deren eine Seite auf der Geraden liegt, eine zweite Seite waagrecht und eine dritte Seite senkrecht, so ergibt sich, wenn man die Länge der senkrechten durch die Länge der waagrechten Seite teilt, genau der Wert 3, der in der Gleichung als Faktor vor dem x steht. Man nennt diesen Wert die **Steigung** der Gerade und bezeichnet sie oft mit dem Buchstaben **m**. Je steiler die Gerade verläuft, desto größer ist die Steigung, je flacher die Gerade, desto kleiner die Steigung. Fällt die Gerade von links nach rechts hin ab, so ist die Steigung negativ.

Man berechnet m, indem man die y-Werte der beiden Endpunkte der Dreiecksseite, die auf der Gerade liegen, voneinander subtrahiert, ebenso die Differenz der beiden x-Werte bildet und dann die Differenz der y-Werte durch die Differenz der x-Werte dividiert.

Heißen die beiden Punkte auf der Gerade z. B. P_1 und P_2, so gilt $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse gibt den sogenannten **y-Achsenabschnitt** an, der oft mit **b** bezeichnet wird.

Jede Gerade (bis auf die, die senkrecht verlaufen) kann als Gleichung in der Form $\boldsymbol{y=m \cdot x+b}$ geschrieben werden.

Für Punkte, die auf der Geraden liegen, gilt, dass die Gleichung stimmt, wenn man ihre x- und y-Werte in die Gleichung einsetzt. Bei Punkten, die nicht auf der Geraden liegen, ist die Gleichung falsch.

Einige Grundaufgaben zu Geraden und Geradengleichungen:

1. Liegt der Punkt $P(3/5)$ auf der Geraden mit der Gleichung $y=2\cdot x-4$?

Lösung: Setze $x=3$ und $y=5$ in die Gleichung ein: $5=2\cdot 3-4$. Links steht 5, rechts ergibt sich durch Ausrechnen 2. Da die Werte nicht übereinstimmen, stimmt die Gleichung nicht und der Punkt liegt nicht auf der Geraden.

---

2. Eine Gerade hat die Steigung -2 und verläuft durch den Punkt $P(-4/6)$. Wie heißt die Geradengleichung?

Lösung: Wir wissen bereits $y=-2\cdot x+b$. Nun setzen wir $x=-4$ und $y=7$ in die Gleichung ein: $7=-2\cdot(-4)+b$
Umformen liefert: $7=8+b \Rightarrow b=-1 \Rightarrow y=-2\cdot x-1$

---

3. Stelle die Geradengleichung für die Gerade auf, die durch die Punkte $P_1(-2/9)$ und $P_2(5/-4)$ verläuft.

Lösung: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-4-9}{5-(-2)}=\frac{-13}{7}$, also gilt: $y=-\frac{13}{7}\cdot x+b$. Nun werden x- und y-Wert von einem der beiden Punkte eingesetzt (ich wähle P_1): $9=-\frac{13}{7}\cdot(-2)+b \Rightarrow 9=\frac{26}{7}+b \Rightarrow \frac{63}{7}=\frac{26}{7}+b \Rightarrow b=\frac{37}{7}$

Es ergibt sich also die Geradengleichung $y=-\frac{13}{7}\cdot x+\frac{37}{7}$.

---

4. Berechne den y-Wert des Punktes $P(2/y)$, der auf der Gerade mit der Gleichung $y=-\frac{1}{3}\cdot x+5$ liegt.

Lösung: Da die Gleichung mit den Koordinaten dieses Punktes stimmen muss, setzen wir die x-Koordinate $x=2$ ein und erhalten die y-Koordinate: $y=-\frac{1}{3}\cdot 2+5=-\frac{2}{3}+\frac{15}{3}=\frac{13}{3}$. Also gilt $y=\frac{13}{3}$.

---

5. Berechne den x-Wert des Punktes P(x/-4), der auf der Geraden $y=-\frac{1}{3}\cdot x+5$ liegt.

Lösung: Lösung wie bei 4.: $-4=-\frac{1}{3}\cdot x+5 \overset{-5}{\Rightarrow} -9=-\frac{1}{3}\cdot x \overset{\cdot(-3)}{\Rightarrow} 27=x$

---

6. Eine Ursprungsgerade verläuft durch den Punkt P(9/-2). Gib die Geradengleichung an.

Lösung: Eine Ursprungsgerade schneidet die y-Achse bei 0, d. h. $b=0$ und damit $y=m\cdot x$.
Einsetzen der Punkt-Koordinaten: $-2=m\cdot 9 \overset{:9}{\Rightarrow} -\frac{2}{9}=m \Rightarrow y=-\frac{2}{9}\cdot x$

---

6. Wie verlaufen die Geraden mit den Gleichungen a) $y=x$, b) $y=-x$, c) $y=3$, d) $x=4$ im Koordinatensystem?

Lösung: a) $y=x$ ist die Kurzschreibweise für $y=1\cdot x+0$. Es ist also eine Ursprungsgerade mit der Steigung 1. Sie verläuft diagonal von links unten nach rechts oben und geht dabei durch der Punkt (0/0).

b) $y=-x$ ist die Kurzschreibweise für $y=-1\cdot x+0$. Es ist also eine Ursprungsgerade mit der Steigung -1. Sie verläuft diagonal von links oben nach rechts unten und geht dabei durch der Punkt (0/0).

c) $y=3$ ist die Kurzschreibweise von $y=0\cdot x+3$. Es ist also eine Gerade mit der Steigung 0, d. h. sie verläuft parallel zur x-Achse und schneidet die y-Achse bei 3.

d) $x=4$ kennzeichnet eine Gerade, bei der alle Punkte den x-Wert 4 haben, d. h. es ist eine Gerade, die senkrecht zur x-Achse läuft und die x-Achse bei 4 schneidet.

---

7. Wie zeichnet man eine Gerade, wenn die Geradengleichung gegeben ist?

Lösung: Da gibt es mehrere Möglichkeiten, die am Beispiel $y=\frac{3}{7}\cdot x-2$ erläutert werden sollen:

a) Die Gerade schneidet bei -2 die y-Achse. Man markiert also als ersten Punkt der Gerade diese Stelle. Hier denkt man sich einen Eckpunkt des Steigungsdreiecks. Um zum anderen Eckpunkt des Steigungsdreiecks zu kommen der auf der Gerade liegt, geht man von -2 auf der y-Achse aus um 7 Einheiten nach rechts und 3 Einheiten nach oben (weil sich die Steigung aus „senkrecht durch waagrecht“ bzw. „3 durch 7“ berechnet). Die Verindungsgerade durch diese beiden Punkte ist die gesuchte Gerade.

b) Man wählt einen beliebigen Wert für x und rechnet sich den y-Wert aus. Die beiden Werte zusammen ergeben die Koordinaten eines Punktes der Geraden. Da man den y-Achsenabschnitt -2 kennt, verbindet man diesen mit dem gefundenen Punkt und erhält die gesuchte Gerade. Beispiel: Für x=7 ergibt sich $y=\frac{3}{7}\cdot 7-2=3-2=1$, also liegen die Punkte $(0/-2)$ (=y-Achsenabschnitt) und (7/1) auf der Gerade.

c) Man kann auch zwei verschiedene x-Werte einsetzen und die y-Werte berechnen und dann durch die beiden gefundenen Punkte die gesuchte Gerade legen.