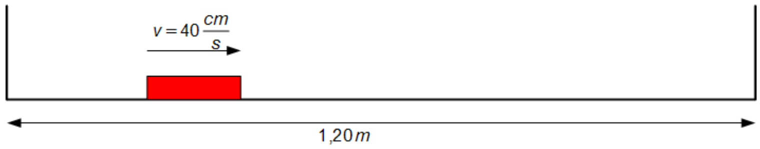
Übungsaufgaben zu nicht-harmonischen Schwingungen

Anmerkung: Bei allen Aufgaben wird die Reibung in jeder Form vernachlässigt.

1. Antriebsfreie Bewegung eines Gleiters auf einer Luftkissenbahn.



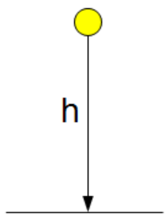
Ein Gleiter der Länge 20 cm gleitet auf einer Luftkissenbahn mit konstanter Geschwindigkeit $v=40\frac{cm}{s}$ hin und her, wobei er an den Begrenzungen elastisch reflektiert wird. Berechne die Schwingungsdauer T.

Lösung:
Der Gleiter kann sich auf einer Länge von 1 m nach links und rechts bewegen.
Die Geschwindigkeit ist konstant, d.h. es gilt die Gleichung $s=v\cdot t \;\rightarrow\; t=\frac{s}{v}$.
Die Schwingungsdauer setzt sich zusammen aus den Zeiten t_{rechts} für den Weg nach rechts und t_{links} für den Weg nach links: $T=t_{rechts}+t_{links}$.

Es gilt $t_{rechts}=t_{links}=\frac{1\,m}{0{,}4\frac{m}{s}}=2{,}5\,s$. Daraus folgt $T=t_{rechts}+t_{links}=2{,}5\,s+2{,}5\,s=5\,s$.

---

2. Freier Fall (Flummi)



Ein Flummi fällt auf eine Unterlage, wird dort reflektiert und steigt (idealer Weise) zur Ausgangshöhe h auf. Berechne die Schwingungsdauer T.

Lösung:

Die Bewegung nach unten entspricht dem freien Fall.

Es gilt also die Bewegungsgleichung $s=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$ mit s=h.

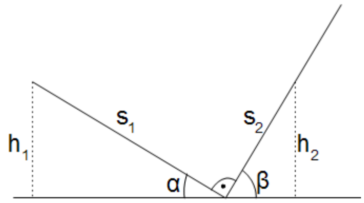
Wegen der Symmetrie der Bewegung benötigt der Ball für den Weg nach unten die gleiche Zeit t_{unten} wie für den Weg nach oben (t_{oben}).
Also gilt: $T=t_{unten}+t_{oben}=2\cdot t_{unten}$.

$$h=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \;\rightarrow\; t^2=\frac{2\cdot h}{g} \;\rightarrow\; t=\sqrt{\frac{2\cdot h}{g}} \;\rightarrow\; T=2\cdot t=2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot h}{g}} .$$

---

3. Schiefe Ebene

2 schiefe Ebenen stehen im rechten Winkel zueinander.
Ein Körper befindet sich auf der 1. schiefen Ebene in der Höhe h_1 und gleitet auf den beiden schiefen Ebenen immer hin und her. Der Übergang zwischen den Ebenen ist so gestaltet, dass er dabei keine Energie verliert. Die 1. schiefe Ebene ist um den Winkel α geneigt. Berechne die Schwingungsdauer T.



Lösung:

Aus Energieerhaltungsgründen gilt $h_1 = h_2 = h$.

Daraus folgt $\sin\alpha = \frac{h_1}{s_1} \rightarrow s_1 = \frac{h_1}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha}$ und ebenso

$\sin\beta = \frac{h_2}{s_2} \rightarrow s_2 = \frac{h_2}{\sin\beta} = \frac{h}{\sin\beta} = \frac{h}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{h}{\cos\alpha}$

Für die Hangabtriebskraft gilt $\frac{F_H}{F_G} = \sin\alpha \rightarrow F_H = F_G \cdot \sin\alpha \rightarrow m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin\alpha \rightarrow a = g \cdot \sin\alpha$.

Entsprechend gilt $a = g \cdot \sin\beta$ für die rechte schiefe Ebene.

Die Schwingungsdauer T ergibt sich aus
$T = t_{links,\,runter} + t_{rechts,\,rauf} + t_{rechts,\,runter} + t_{links,\,rauf}$ mit $t_{links,runter} = t_{links,rauf}$ und $t_{rechts,runter} = t_{rechts,rauf}$

$t_{links,\,runter}$: $\frac{h}{\sin\alpha} = s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot t^2 \rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot h}{g \cdot \sin^2\alpha} \rightarrow t_{links,\,runter} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g \cdot \sin^2\alpha}}$

Auf gleiche Weise ergibt sich
$t_{rechts,\,runter}$: $\frac{h}{\cos\alpha} = s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot t^2 \rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot h}{g \cdot \cos^2\alpha} \rightarrow t_{links,\,runter} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g \cdot \cos^2\alpha}}$

Insgesamt ergibt sich daraus die Schwingungsdauer
$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g \cdot \sin^2\alpha}} + \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g \cdot \cos^2\alpha}} + \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g \cdot \cos^2\alpha}} + \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g \cdot \sin^2\alpha}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g \cdot \sin^2\alpha}} + 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g \cdot \cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{8 \cdot h}{g}} \cdot \left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$$