

Zentraler elastischer Stoß - Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind gesucht

Gegeben sind die Massen m_1 und m_2 und die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 vor dem Stoß.

Die Massen ändern sich beim Stoß nicht.

Gesucht sind die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' nach dem Stoß.

Wir gehen aus vom Impulserhaltungssatz (IES) und vom Energieerhaltungssatz (EES):

$$\text{IES: } m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \quad [1]$$

$$\text{EES: } \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2'^2 \rightarrow m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2 = m_1 \cdot v_1'^2 + m_2 \cdot v_2'^2 \quad [2]$$

$$\text{Auflösen von [1] nach } v_2': v_2' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m_1 \cdot v_1'}{m_2} \quad [3]$$

$$\text{Daraus folgt: } v_2'^2 = \frac{m_1^2 \cdot v_1^2 + m_2^2 \cdot v_2^2 + m_1^2 \cdot v_1'^2 + 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1 \cdot v_2 - 2 \cdot m_1^2 \cdot v_1 \cdot v_1' - 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1' \cdot v_2}{m_2^2} \quad [4]$$

Einsetzen von [4] in [2]:

$$m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2 = m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{m_1^2 \cdot v_1^2 + m_2^2 \cdot v_2^2 + m_1^2 \cdot v_1'^2 + 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1 \cdot v_2 - 2 \cdot m_1^2 \cdot v_1 \cdot v_1' - 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1' \cdot v_2}{m_2}$$

Multiplizieren mit m_2 :

$$m_1 \cdot m_2 \cdot v_1^2 + m_2^2 \cdot v_2^2 = m_1 \cdot m_2 \cdot v_1'^2 + m_1^2 \cdot v_1^2 + m_2^2 \cdot v_2^2 + m_1^2 \cdot v_1'^2 + 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1 \cdot v_2 - 2 \cdot m_1^2 \cdot v_1 \cdot v_1' - 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1' \cdot v_2$$

Ordnen nach v_1' :

$$0 = m_1 \cdot m_2 \cdot v_1'^2 + m_1^2 \cdot v_1'^2 - 2 \cdot m_1^2 \cdot v_1 \cdot v_1' - 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1' \cdot v_2 + m_1^2 \cdot v_1^2 + m_2^2 \cdot v_2^2 + 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1 \cdot v_2 - m_1 \cdot m_2 \cdot v_1^2 - m_2^2 \cdot v_2^2$$

Ordnen nach Potenzen von v_1' :

$$0 = (m_1 \cdot m_2 + m_1^2) \cdot v_1'^2 - 2 \cdot (m_1^2 \cdot v_1 + m_1 \cdot m_2 \cdot v_2) \cdot v_1' + (m_1^2 \cdot v_1^2 + 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1 \cdot v_2 - m_1 \cdot m_2 \cdot v_1^2)$$

Dividieren durch $(m_1 \cdot m_2 + m_1^2)$:

$$0 = v_1'^2 - \frac{2 \cdot (m_1^2 \cdot v_1 + m_1 \cdot m_2 \cdot v_2)}{(m_1 \cdot m_2 + m_1^2)} \cdot v_1' + \frac{(m_1^2 \cdot v_1^2 + 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1 \cdot v_2 - m_1 \cdot m_2 \cdot v_1^2)}{(m_1 \cdot m_2 + m_1^2)} \rightarrow$$

$$0 = v_1'^2 - \frac{2 \cdot (m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)}{(m_1 + m_2)} \cdot v_1' + \frac{(m_1 \cdot v_1^2 + 2 \cdot m_2 \cdot v_1 \cdot v_2 - m_2 \cdot v_1^2)}{(m_1 + m_2)} \rightarrow$$

$$(v_1')_{1,2} = \frac{(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)}{(m_1 + m_2)} \pm \sqrt{\frac{(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{(m_1 \cdot v_1^2 + 2 \cdot m_2 \cdot v_1 \cdot v_2 - m_2 \cdot v_1^2) \cdot (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2}} \rightarrow$$

$$(v_1')_{1,2} = \frac{(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)}{(m_1 + m_2)} \pm \sqrt{\frac{(m_1^2 \cdot v_1^2 + 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1 \cdot v_2 + m_2^2 \cdot v_2^2)}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{(m_1^2 \cdot v_1^2 + m_1 \cdot m_2 \cdot v_1^2 + 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot v_1 \cdot v_2 + 2 \cdot m_2^2 \cdot v_1 \cdot v_2 - m_1 \cdot m_2 \cdot v_1^2 - m_2^2 \cdot v_1^2)}{(m_1 + m_2)^2}} \rightarrow$$

$$(v_1')_{1,2} = \frac{(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)}{(m_1 + m_2)} \pm \sqrt{\frac{(m_2^2 \cdot v_2^2 - 2 \cdot m_2^2 \cdot v_1 \cdot v_2 + m_2^2 \cdot v_1^2)}{(m_1 + m_2)^2}} = \frac{(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)}{(m_1 + m_2)} \pm \sqrt{\frac{(m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot v_1)^2}{(m_1 + m_2)^2}} \rightarrow$$

$$(v_1')_{1,2} = \frac{(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)}{(m_1 + m_2)} \pm \frac{(m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot v_1)}{(m_1 + m_2)} \rightarrow v_1' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot (2 \cdot v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \text{ oder } v_1' = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v_1}{m_1 + m_2} = v_1$$

$$\text{Aus Symmetriegründen gilt für } v_2': v_2' = \frac{m_2 \cdot v_2 + m_1 \cdot (2 \cdot v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \text{ oder } v_2' = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v_2}{m_1 + m_2} = v_2$$

Die zweite Lösung ist jeweils uninteressant, da dabei kein Zusammenstoß stattfindet.