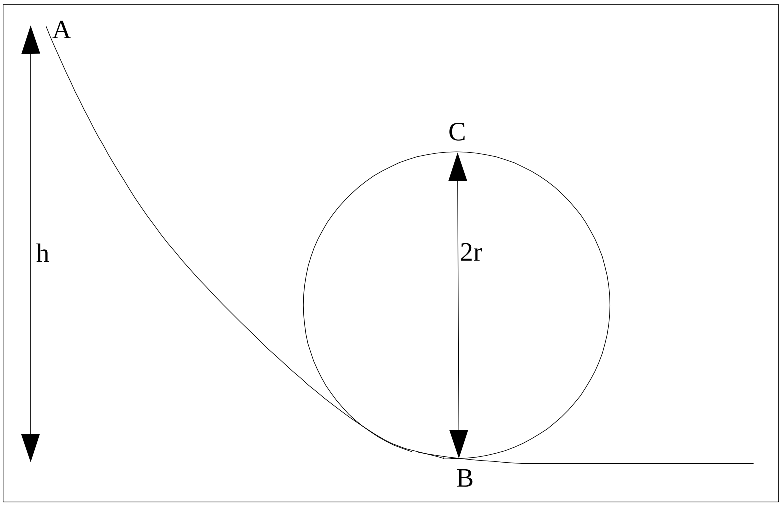
Looping und Energieerhaltungssatz



Eine Achterbahn enthält einen Looping.
Berechnen Sie

1. aus welcher Höhe h man bei A starten muss, damit man im Punkt C an der Bahn haftet und nicht herunterstürzt und
2. wie groß dann die Geschwindigkeit in den Punkten B und C jeweils ist.

Benutzen Sie folgende Annahmen, damit die Rechnung nicht zu schwierig wird:

- Der Achterbahnwagen sei punktförmig und habe die Masse m.
- Von Reibungseffekten sei abzusehen.
- Im Punkt B sei die potentielle Energie gleich 0.

Zu 1:
Auf Grund des Energieerhaltungssatzes sind die Energieen in den Punkten A, B und C gleich.
Bei A ist nur die potenzielle Energie ungleich 0, bei B nur die kinetische Energie ungleich 0 und bei C sind sowohl die potenzielle als auch die kinetische Energie ungleich 0:

bei A: $W_A = m \cdot g \cdot h$

bei B: $W_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2$

bei C: $W_C = m \cdot g \cdot (2r) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_C^2$

Im Punkt C muss die Zentripetalkraft F_Z, die der Fahrer als Zentrifugalkraft empfindet, größer als die Gewichtskraft F_G sein, weil sonst der Wagen spätestens bei C abstürzt.
Die Grenze liegt also bei $F_Z = F_G$.

bei C: $F_Z = \frac{m \cdot v_C^2}{r}$; $F_G = m \cdot g$; $F_Z = F_G \Rightarrow \frac{m \cdot v_C^2}{r} = m \cdot g \Rightarrow v_C^2 = g \cdot r$

wegen $W_A = W_C$ gilt $m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot (2r) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_C^2$ Eingesetzt folgt:

$$m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot (2r) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot r \Rightarrow h = 2r + \frac{1}{2} \cdot r \Rightarrow \boxed{h = \frac{5}{2} \cdot r}$$

Man sieht, dass die Masse und der Ortsfaktor gar keine Rolle spielen.

Zu 2:
Wegen $W_A = W_B$ gilt

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \frac{5}{2} \cdot r} = \boxed{\sqrt{5 \cdot g \cdot r} = v_B}$$

Wegen $W_A = W_C$ gilt $m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot \frac{5}{2} \cdot r = m \cdot g \cdot (2r) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_C^2$.

Umgeformt folgt daraus: $g \cdot \frac{5}{2} \cdot r = g \cdot (2r) + \frac{1}{2} \cdot v_C^2 \Rightarrow v_C^2 = 5 \cdot g \cdot r - 4 \cdot g \cdot r = g \cdot r$

Also: $\boxed{v_C = \sqrt{g \cdot r}}$ Die Geschwindigkeit ist also im Punkt B $\sqrt{5}$ mal so groß wie im Punkt C.

In Wirklichkeit sehen die Werte auf Grund der Reibung und der ausgedehnten bewegten Körper natürlich anders aus!