Experimentelle Bestimmung der Tiefe eines Brunnens

Eine goldene Kugel (Märchen vom Froschkönig) fällt in einen Brunnen. Nach genau 1,5 s hört die Prinzessin das Auftreffen der Kugel auf dem Wasser. Wie tief ist der Brunnen? (Schallgeschwindigkeit $v_S = 330\,\frac{m}{s}$).

Näherungslösung

Die Kugel fällt im freien Fall. Es kann also die Formel $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ verwendet werden.

Mit dem Weg s_K und der Fallzeit t_K der Kugel gilt also $s_K = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_K^2$.

Näherungsweise gilt $t_K \approx 1{,}5\,s$ und damit $s_K = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_K^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5^2\,m = 11{,}04\,m$.

Genauere Lösung

In der Näherungslösung wurde nicht berücksichtigt, dass der Schall nach seiner Erzeugung noch durch den Brunnen (Strecke s_K) zum Ohr der Prinzessin gelangen muss und dazu auch eine Zeit t_S benötigt.

Die Gesamtzeit $t = 1{,}5\,s$ ergibt sich also aus $t = t_K + t_S$.

Für s_K kann man deshalb ansetzen $s_K = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(t - t_S\right)^2$.

Da sich der Schall mit konstanter Geschwindigkeit ausbreitet, gilt $s_K = v_S \cdot t_S$ oder $t_S = \frac{s_K}{v_S}$.

Einsetzen: $s_K = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(t - t_S\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(t - \frac{s_K}{v_S}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(t^2 - \frac{2\,t\,s_K}{v_S} + \frac{s_K^2}{v_S^2}\right) = \frac{g\,t^2}{2} - \frac{g\,t\,s_K}{v_S} + \frac{g\,s_K^2}{2\,v_S^2}$

Ordnen nach Potenzen von s_K: $\frac{g}{2\,v_S^2} \cdot s_K^2 - \left(\frac{g\,t}{v_S} + 1\right) \cdot s_K + \frac{g\,t^2}{2} = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung mit p-q-Formel:

Faktor vor s_K^2 entfernen:

$$s_K^2 - \frac{2\,v_S^2}{g} \cdot \left(\frac{g\,t}{v_S} + 1\right) \cdot s_K + v_S^2\,t^2 = s_K^2 - \frac{2\,v_S^2}{g} \cdot \left(\frac{g\,t + v_S}{v_S}\right) \cdot s_K + v_S^2\,t^2 = s_K^2 - \frac{2\,v_S\,g\,t + 2\,v_S^2}{g} \cdot s_K + v_S^2\,t^2 = 0$$

p-q-Formel anwenden: $s_{K\,1,2} = \frac{v_S\,g\,t + v_S^2}{g} \pm \sqrt{\frac{\left(v_S\,g\,t + v_S^2\right)^2}{g^2} - v_S^2\,t^2} = \frac{v_S\,g\,t + v_S^2}{g} \pm \sqrt{v_S^2\,t^2 + \frac{2\,v_S^3\,t}{g} + \frac{v_S^4}{g^2} - v_S^2\,t^2}$

also: $s_{K\,1,2} = \frac{v_S\,g\,t + v_S^2}{g} \pm \sqrt{\frac{2\,v_S^3 t}{g} + \frac{v_S^4}{g^2}} = \left(v_S\,t + \frac{v_S^2}{g}\right) \pm \frac{v_S}{g} \cdot \sqrt{2\,v_S\,g\,t + v_S^2}$

Werte einsetzen: $s_{K\,1,2} = \left(\left(330 \cdot 1{,}5 + \frac{330^2}{9{,}81}\right) \pm \frac{330}{9{,}81} \cdot \sqrt{2 \cdot 330 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5 + 330^2}\right) m = \left(11595{,}92 \pm 11585{,}35\right) m$

$s_{K1} = 23181{,}26\,m$; $s_{K2} = 10{,}57\,m$

Der erste Wert kann nicht stimmen (siehe Näherungslösung).

Also ist der Brunnen 10,57 m tief.