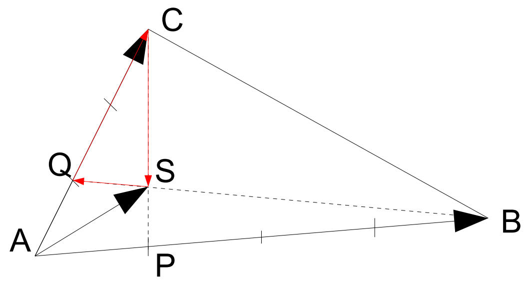
Berechnung von Teilen einer Strecke
mit der Methode des geschlossenen Streckenzuges

In folgender Figur wird das Dreieck ABC durch die Vektoren $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$ und $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ aufgespannt.

Die Strecke AC wird in 3 gleiche Teile geteilt, die Strecke AB in 4 gleiche Teile.

Berechnen Sie den Vektor $\overrightarrow{AS}$ und berechnen Sie, wie S die Strecken CP und BQ teilt.



Die Vektoren $\overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{CS}$ und $\overrightarrow{SQ}$ liegen auf einem geschlossenen Streckenzug und es gilt:

$\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SQ}=\vec{0}$

Diese Gleichung wird so umgeformt, dass nur noch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und die Konstanten λ und μ auftreten:

$$\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SQ}=\vec{0} \rightarrow \frac{2}{3}\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\overrightarrow{CP}+\mu\cdot\overrightarrow{BQ}=\vec{0} \rightarrow \frac{2}{3}\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\left(-\vec{a}+\frac{1}{4}\cdot\vec{b}\right)+\mu\cdot\left(-\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot\vec{a}\right)=\vec{0} \rightarrow$$

$$\frac{2}{3}\cdot\vec{a}-\lambda\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}\cdot\lambda\cdot\vec{b}-\mu\cdot\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot\mu\cdot\vec{a}=\vec{0} \rightarrow \vec{a}\cdot\left(\frac{2}{3}-\lambda+\frac{1}{3}\cdot\mu\right)+\vec{b}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\lambda-\mu\right)=\vec{0}$$

Nur dann, wenn die Koeffizienten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Wert 0 haben, kann die Summe den Nullvektor ergeben.

Es ergibt sich aus dieser Bedingung folgendes Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{matrix}\frac{2}{3}-\lambda+\frac{1}{3}\cdot\mu=0\\ \frac{1}{4}\cdot\lambda-\mu=0\end{matrix}\right\} \text{ oder mit 3 bzw. 4 multipliziert: } \left\{\begin{matrix}2-3\cdot\lambda+\mu=0\\ \lambda-4\cdot\mu=0\end{matrix}\right\}$$

Aus der unteren Gleichung ergibt sich $\lambda=4\cdot\mu$. Dieser λ-Wert wird in die obere Gleichung eingesetzt:

$$2-3\cdot4\cdot\mu+\mu=0 \rightarrow 2-12\cdot\mu+\mu=0 \rightarrow 2=11\cdot\mu \rightarrow \mu=\frac{2}{11}$$

λ ergibt sich aus $\lambda=4\cdot\mu=4\cdot\frac{2}{11}=\frac{8}{11}$.

Die Strecke CS wird also durch S im Verhältnis 8 zu 3 geteilt (da $\lambda=\frac{8}{11}$, bleiben für den Rest der Strecke noch $\frac{3}{11}$).

Entsprechend wird die Strecke BQ durch S im Verhältnis 9 zu 2 geteilt (da $\mu=\frac{2}{11}$, bleiben für den Rest der Strecke noch $\frac{9}{11}$).

$\overrightarrow{AS}$ ergibt sich aus $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CS}=\vec{a}+\overrightarrow{CS}=\vec{a}+\lambda\cdot\left(-\vec{a}+\frac{1}{4}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}-\frac{8}{11}\cdot\vec{a}+\frac{8}{11}\cdot\frac{1}{4}\cdot\vec{b}=\frac{3}{11}\cdot\vec{a}+\frac{2}{11}\cdot\vec{b}$