Beispiel für die Untersuchung einer algebraischen Kurve

Gegeben ist die Gleichung $x^3 + y^3 - 3x^2 = 0$ [1] .

Schnitte mit den Koordinatenachsen

x-Achse: $y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,;x_2 = 3 \Rightarrow (0/0)\,;(3/0)$

y-Achse: $x = 0 \Rightarrow y^3 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0/0)$

Steigungen in den Koordinatenschnittpunkten

$\frac{d}{dx}:\ 3x^2 + 3y^2 y' - 6x = 0$ [2] $\qquad$ $\frac{d}{dy}:\ 3x^2 x' + 3y^2 - 6x\,x' = 0$ [3]

Der Punkt (0/0) liefert in beiden Ableitungen kein Ergebnis. Das Verhalten der Kurve bei (0/0) muss also noch gesondert untersucht werden.

(3/0) bei [3] eingesetzt ergibt $3 \cdot 9 \cdot x' + 3 \cdot 0 - 6 \cdot 3 \cdot x' = 0 \Rightarrow 27x' - 18x' = 0 \Rightarrow x' = 0$
Die Kurve verläuft im Punkt (3/0) also senkrecht.

waagrechte Tangenten

In [2] wird $y' = 0$ gesetzt. Daraus folgt $3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x \cdot (x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,;x_2 = 2$
$x_1 = 0$ wird noch untersucht.
$x_2 = 2$ in [1] eingesetzt ergibt $8 + y^3 - 3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow 8 + y^3 - 12 = 0 \Rightarrow y^3 = 4 \Rightarrow y = \sqrt[3]{4}$,
also waagrechte Tangente im Punkt $\left(2/\sqrt[3]{4}\right)$.

senkrechte Tangenten

In [3] wird $x' = 0$ gesetzt. Daraus folgt $3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$, d.h. auf der x-Achse kann es senkrechte Tangenten geben. Punkt (0/0) fällt zunächst mal weg, aber im Punkt (3/0) ist dann eine senkrechte Tangente vorhanden.

Verhalten der Kurve bei x = 0, d.h. im Punkt (0/0)

Die Kurve wird linearisiert durch den Ansatz $y = m \cdot x$.

Einsetzen in [1] liefert $x^3 + (m \cdot x)^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^3 + m^3 \cdot x^3 - 3x^2 = 0 \overset{x \neq 0}{\Rightarrow} x + m^3 x - 3 = 0$

$\Rightarrow m^3 = \frac{3-x}{x} = \frac{3}{x} - 1$. Für $x \to 0$ geht m gegen ∞ . Also verläuft die Kurve bei (0/0) senkrecht.

Verhalten der Kurve für $x \to \pm\infty$, Untersuchung auf Asymptote

Die Kurve wird linearisiert durch den Ansatz $y = m \cdot x + c$.

Einsetzen in [1] liefert
$x^3 + (m \cdot x + c)^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^3 + m^3 x^3 + 3m^2 c\,x^2 + 3m\,c^2 x + c^3 - 3x^2 = 0$

[4]

$$x^3 \cdot (1+m^3) + x^2 \cdot (3m^2c-3) + x \cdot (3mc^2) + c^3 = 0 \;\Rightarrow\; (1+m^3) + \frac{3m^2c-3}{x} + \frac{3mc^2}{x^2} + \frac{c^3}{x^3} = 0$$

Für $x \to \infty$ werden die Brüche zu 0 und es bleibt stehen $1+m^3=0 \;\Rightarrow\; m^3=-1 \;\Rightarrow\; m=-1$.

In [4] eingesetzt gibt das $x^3 \cdot (1-1) + x^2 \cdot (3c-3) + x \cdot (-3c^2) + c^3 = 0 \;\Rightarrow$

$$x^2 \cdot (3c-3) + x \cdot (-3c^2) + c^3 = 0 \;\Rightarrow\; (3c-3) + \frac{-3c^2}{x} + \frac{c^3}{x^2} = 0$$

Für $x \to \infty$ werden die Brüche zu 0 und es bleibt stehen $3c-3=0 \;\Rightarrow\; c=1$

Also gibt es eine schräge Asymptote mit der Gleichung $y=-x+1$ [5]

Schneidet die Kurve die Asymptote im Endlichen?

[5] wird in [1] eingesetzt: $x^3+(-x+1)^3-3x^2=0 \;\Rightarrow\; x^3-x^3+3x^2-3x+1-3x^2=0 \;\Rightarrow$

$$-3x+1=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{3} \quad [6]$$

Den zugehörigen y-Wert erhält man, wenn man [6] in [1] einsetzt:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + y^3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{27} + y^3 - \frac{3}{9} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{27} + y^3 - \frac{9}{27} = 0 \;\Rightarrow\; y^3 - \frac{8}{27} = 0 \;\Rightarrow$$

$y^3 = \frac{8}{27} \;\Rightarrow\; y = \frac{2}{3}$. Die Asymptote wird von der Kurve also in $\left(\frac{1}{3} / \frac{2}{3}\right)$ geschnitten.

Zusammenfassung und Graph

(0/0) liegt unterhalb und (3/0) oberhalb der Asymptote. Die Kurve schneidet die Asymptote nur in einem Punkt. Deshalb liegt links vom Schnittpunkt die Kurve vollständig unterhalb und rechts vollständig oberhalb der Asymptote.

Formt man [1] zu $y^3 = 3x^2 - x^3 = x^2 \cdot (3-x)$ um , erkennt man, dass für $x < 3$ die y-Werte positiv und für $x > 3$ negativ sein müssen. Da der Punkt (0/0) angenommen wird und die Kurve dort senkrecht verläuft, in der Umgebung von (0/0) aber keine negativen y-Werte vorkommen, muss bei (0/0) eine Spitze vorliegen.