Beispielaufgabe zum Thema: „Abstand windschiefer Geraden“

Aufgabe

Gegeben sind die beiden Geraden $\vec{r}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{r}_2=\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden und berechnen Sie, falls die Geraden keinen Schnittpunkt haben sollten, den Abstand der beiden Geraden.

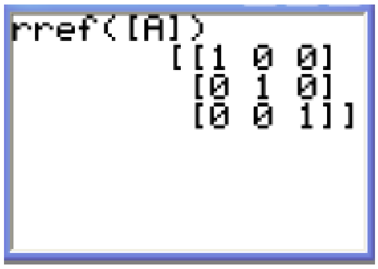
Lösung

Die beiden Geraden sind nicht identisch oder parallel, da sonst ein Richtungsvektor das Vielfache des anderen Richtungsvektors sein müsste: Da der ν-Wert bei $\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}=\nu\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ nicht in allen Komponenten übereinstimmt, sind die Vektoren nicht kollinear.

Wenn die beiden Geraden sich schneiden, muss für jeweils ein λ und μ gelten: $\vec{r}_1=\vec{r}_2$:

$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\+1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\1\\-2\end{pmatrix}$ Das Gleichungssystem wird mit dem TI-84

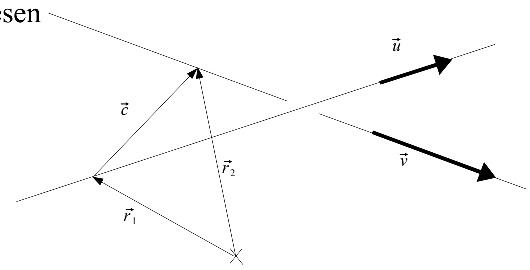
über die Matrix 

und den rref-Befehl 

gelöst. Es ergibt sich λ=0, μ=0 und 0=1. Da das nicht möglich ist, existiert keine Lösung, also schneiden sich die beiden Geraden nicht.

Die Geraden sind also windschief und es muss nun der Abstand der beiden Geraden berechnet werden.

Der Abstand ist die Länge der kürzesten Verbindung zwischen diesen Geraden. Die Verbindungsstrecke steht dabei senkrecht auf jeder der beiden Geraden. Wird die Verbindungsstrecke durch den Vektor $\vec{c}=-\vec{r}_1+\vec{r}_2$ repräsentiert, so muss gelten



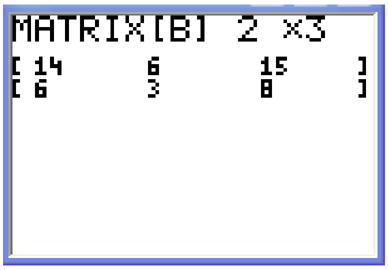
$\vec{c}*\vec{u}=0$ und $\vec{c}*\vec{v}=0$.

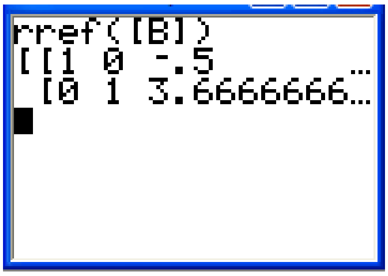
$$\vec{c}=-\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5+2\lambda+\mu\\1-3\lambda-\mu\\-2+\lambda+\mu\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}*\vec{u}=\begin{pmatrix}-5+2\lambda+\mu\\1-3\lambda-\mu\\-2+\lambda+\mu\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}=10-4\lambda-2\mu+3-9\lambda-3\mu+2-\lambda-\mu=15-14\lambda-6\mu=0$$

$$\vec{c}*\vec{v}=\begin{pmatrix}-5+2\lambda+\mu\\1-3\lambda-\mu\\-2+\lambda+\mu\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=-5+2\lambda+\mu-1+3\lambda+\mu-2+\lambda+\mu=-8+6\lambda+3\mu=0$$

Das daraus entstehende Gleichungssystem $\left\{\begin{matrix} 14\lambda+6\mu=15 \\ 6\lambda+3\mu=8 \end{matrix}\right\}$ wird mit dem Taschenrechner gelöst:

Matrix: 

rref-Befehl: 

Es ergeben sich die Werte $\lambda=-\frac{1}{2}; \mu=\frac{11}{3}$.

Damit gilt für den Vektor $\vec{c}$: $\vec{c}=\begin{pmatrix} -5+2\lambda+\mu \\ 1-3\lambda-\mu \\ -2+\lambda+\mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5-1+\frac{11}{3} \\ 1+\frac{3}{2}-\frac{11}{3} \\ -2-\frac{1}{2}+\frac{11}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{7}{6} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}=\frac{7}{6}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für die Länge von $\vec{c}$ und damit den Abstand der beiden Geraden gilt:
$|\vec{c}|=\frac{7}{6}\cdot\sqrt{4+1+1}=\frac{7}{6}\cdot\sqrt{6}=\frac{7}{\sqrt{6}}\approx 2{,}8577$.