Beispiel für das Bilden einer Ableitung mit Hilfe des Differenzenquotienten

$f(x)=x^3-2x^2-5x-4$

---

1. Methode: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(x^3-2x^2-5x-4\right)-\left(x_0^3-2x_0^2-5x_0-4\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-2x^2-5x-4-x_0^3+2x_0^2+5x_0+4}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}-2\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}-5\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=3x_0^2-2\cdot 2x_0-5\cdot 1=3x_0^2-4x_0-5$$

Nebenrechnungen:

$\left(x^3-x_0^3\right):\left(x-x_0\right)=x^2+x\cdot x_0+x_0^2$

$\underline{x^3-x^2\cdot x_0}$

$x^2\cdot x_0-x_0^3$

$\underline{x^2\cdot x_0-x\cdot x_0^2}$

$x\cdot x_0^2-x_0^3$

$\underline{x\cdot x_0^2-x_0^3}$

0

$$\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)\cdot(x+x_0)}{x-x_0}=x+x_0$$

$$\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$$

---

2. Methode: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\left((x_0+h)^3-2\cdot(x_0+h)^2-5\cdot(x_0+h)-4\right)-(x_0^3-2\cdot x_0^2-5\cdot x_0-4)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3-2x_0^2-4x_0h-2h^2-5x_0-5h-4-x_0^3+2x_0^2+5x_0+4}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3x_0^2h+3x_0h^2+h^3-4x_0h-2h^2-5h}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3x_0^2+3x_0h+h^2-4x_0-2h-5\right)=3x_0^2-4x_0-5$$

Ableitungs-Formeln

$f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$; $n\in\mathbb{R}$, dazu folgende Spezialfälle:

$f(x)=\dfrac{1}{x^n} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-n}{x^{n+1}}$

$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

$f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0$; c ist Konstante

$f(x)=c\cdot u(x) \Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$

$f(x)=u(x)\pm v(x) \Rightarrow f'(x)=u'(x)\pm v'(x)$