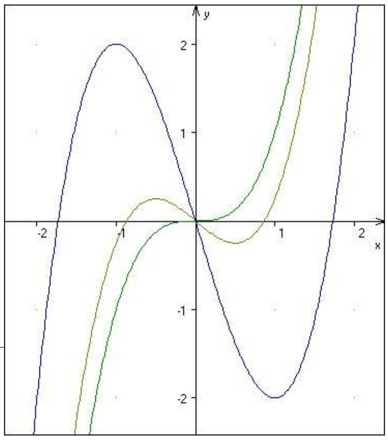
Übungsblatt zu Funktionsscharen

Gegeben ist eine Funktionsschar durch ihre Gleichung $f_t(x)=x^3-3t^2x$ mit $t>0$.

1 Kurvendiskussion (Kurzform)

Ableitungen: $f_t'(x)=3\cdot x^2-3\cdot t^2$ $\quad f_t''(x)=6\cdot x$ $\quad f_t'''(x)=6$

Nullstellen: $f_t(x)=0 \Rightarrow x^3-3t^2x=0 \Rightarrow x\cdot(x-\sqrt{3}\cdot t)\cdot(x+\sqrt{3}\cdot t)=0 \Rightarrow x_1=0\ ;\ x_{2,3}=\pm\sqrt{3}\cdot t$



waagrechte Tangenten: $f_t'(x)=0 \Rightarrow 3\cdot x^2-3\cdot t^2=0 \Rightarrow x=\pm t$

$$f_t''(\pm t)=\pm 6\cdot t\begin{Bmatrix} >0 \text{ für } +t\text{, also Minimum} \\ <0 \text{ für } -t\text{, also Maximum}\end{Bmatrix}$$

$$f_t(\pm t)=\pm t^3\mp 3\cdot t^3=\mp 2\cdot t^3$$

Wendepunkte: $f_t''(x)=0 \Rightarrow 6\cdot x=0 \Rightarrow x=0$

$f_t'''(0)=6>0$, also Wendepunkt r→l

2 Für welches t geht die Kurve durch (2/5) ?

$$f_t(2)=5 \Rightarrow 2^3-3\cdot t^2\cdot 2=5 \Rightarrow 8-6\cdot t^2=5 \Rightarrow 3=6\cdot t^2 \Rightarrow \frac{1}{2}=t^2 \Rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

3 Für welches t ist die 2. Winkelhalbierende die Tangente im Ursprung?

Gleichung der 2. Winkelhalbierenden: $w_2(x)=-x$ mit $w_2'(x)=-1$

Die Tangente im Ursprung hat die Steigung $f'(0)$ und den y-Achsenabschnitt 0:
$f'(0)=0-3\cdot t^2=-3\cdot t^2$
Also gilt für die Gleichung der Tangente bei x=0: $T_0(x)=-3\cdot t^2\cdot x$ mit $T_0'(x)=-3\cdot t^2$.
Nun muss gelten: $w_2'(0)=T_0'(0) \Rightarrow -1=-3\cdot t^2 \Rightarrow t^2=\frac{1}{3} \Rightarrow t=\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Die Funktion mit der Gleichung $f_{\sqrt{\frac{1}{3}}}=x^3-3\cdot\frac{1}{3}\cdot x=x^3-x$ besitzt also die 2. Winkelhalbierende als Tangente im Punkt (0/0).

4 Für welches t liegen die Extrempunkte auf der 2. Winkelhalbierenden?

Für die Extrempunkte gilt: $f_t'(x)=0 \Rightarrow 3\cdot x^2-3\cdot t^2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm t$
Dazu gehören die Funktionswerte $f_t(x)=\pm t^3-3\cdot t^2\cdot(\pm t)=\pm t^3 \mp 3\cdot t^3=\mp 2\cdot t^3$
Für die 2. Winkelhalbierende $w_2(x)=-x$ gilt, dass der Funktionswert gleich ist dem negativen x-Wert. Also muss gelten: $\mp 2\cdot t^3=-(\pm t)=\mp t \Rightarrow 2\cdot t^3=t \Rightarrow 2\cdot t^3-t=0 \Rightarrow t\cdot(2\cdot t^2-1)=0$
Es ergeben sich die Lösungen $t_1=0\,;\,t_2=\sqrt{\frac{1}{2}}$ (keine 3. Lösung wegen $t>0$)
Da für $t=0$ der Funktionsgraph keine Extrempunkte besitzt - nur einen Sattelpunkt - gilt nur die Lösung t_2 .

---

5 Für welches t ist die Tangente im Schnittpunkt mit der positiven x-Achse parallel zur 1. Winkelhalbierenden?

Die erste Winkelhalbierende $w_1(x)=x$ hat überall die Steigung 1.
Die Nullstelle im positiven Bereich liegt bei $x_N=\sqrt{3}\cdot t$ (siehe oben bei 1).
Die Steigung an dieser Stelle beträgt $f_t'(\sqrt{3}\cdot t)=3\cdot 3\cdot t^2-3\cdot t^2=9\cdot t^2-3\cdot t^2=6\cdot t^2$
Diese Steigung soll den Wert der Steigung der 1. Winkelhalbierenden (also 1) haben.
Also gilt: $6\cdot t^2=1 \Rightarrow t^2=\frac{1}{6} \Rightarrow t=\sqrt{\frac{1}{6}}$ Nur eine Lösung wegen $t>0$.
Die Gleichung der entsprechenden Funktion ist also $f_{\sqrt{\frac{1}{6}}}(x)=x^3-3\cdot\frac{1}{6}\cdot x=x^3-\frac{1}{2}\cdot x$.

---

6 Auf welcher Kurve liegen alle Extrempunkte?

Unter 4 wurde gezeigt, dass für die Extrempunkte gilt: $x_E=\pm t$. Daraus folgt: $t=\pm x_E$.
Für die Funktionswerte der Extrempunkte gilt:
$f(x_E)=x_E^3-3\cdot t^2\cdot x_E=x_E^3-3\cdot x_E^2\cdot x_E=x_E^3-3\cdot x_E^3=-2\cdot x_E^3$.
Also liegen alle Extrempunkte auf der Kurve mit der Funktionsgleichung $f(x_E)=-2\cdot x_E^3$

---

7 Zeigen Sie, dass alle Kurven der Schar symmetrisch zum Punkt (0/0) liegen.

Zu zeigen ist: $f(x)=-f(-x)$
$-f(-x)=-\left((-x)^3-3\cdot t^2\cdot(-x)\right)=-\left(-x^3+3\cdot t^2\cdot x\right)=x^3-3\cdot t^2\cdot x=f(x)$
