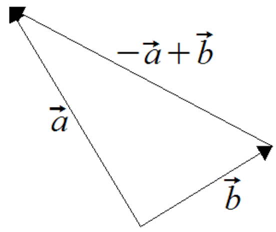
Das Skalarprodukt zweier Vektoren



Stehen die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\-6\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}8\\4\\-8\end{pmatrix}$ zueinander senkrecht?

Man kann das überprüfen, indem man auf die Längen der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $-\vec{a}+\vec{b}$ den Satz von Pythagoras anwendet.

Es gilt $|\vec{a}|=\sqrt{6^2+(-6)^2+3^2}=\sqrt{36+36+9}=\sqrt{81}=9$, $|\vec{b}|=\sqrt{8^2+4^2+(-8)^2}=\sqrt{64+16+64}=\sqrt{144}=12$ und

$$|-\vec{a}+\vec{b}|=\left|\begin{pmatrix}2\\10\\-11\end{pmatrix}\right|=\sqrt{2^2+10^2+(-11)^2}=\sqrt{4+100+121}=\sqrt{225}=15$$

Da $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|-\vec{a}+\vec{b}|^2$ wegen $9^2+12^2=15^2$, sind die beiden Vektoren zueinander senkrecht.

Der Rechenweg ist etwas umständlich und zeitaufwändig. In der Hoffnung auf einen schnelleren und einfacheren Weg zur Überprüfung auf die Eigenschaft „senkrecht“ führen wir eine allgemeine Rechnung mit den Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ und $-\vec{a}+\vec{b}=-\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a_1+b_1\\-a_2+b_2\\-a_3+b_3\end{pmatrix}$ für den Fall $\vec{a}\perp\vec{b}$ durch.

$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|-\vec{a}+\vec{b}|^2 \rightarrow a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2=(-a_1+b_1)^2+(-a_2+b_2)^2+(-a_3+b_3)^2=$$

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2=a_1^2-2a_1b_1+b_1^2+a_2^2-2a_2b_2+b_2^2+a_3^2-2a_3b_3+b_3^2 \rightarrow$$

$$0=-2a_1b_1-2a_2b_2-2a_3b_3 \rightarrow 0=-2\cdot(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) \rightarrow 0=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

Für die rechte Seite der Gleichung schreibt man abkürzend $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

und nennt die Verknüpfung * „Skalarprodukt“, weil sich als Ergebnis eine Zahl (=Skalar) ergibt.

Das Skalarprodukt ist für beliebige n-dimensionale Vektoren folgendermaßen definiert:

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\\dots\\a_n\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\\dots\\b_n\end{pmatrix}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3+\ldots+a_n\cdot b_n$$

Das Skalarprodukt zweier zueinander senkrecht stehender Vektoren hat also den Wert 0.

Was ergibt sich als Skalarprodukt, wenn die Vektoren parallel sind?

Beispiel: $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ sind parallel. Es gilt $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}=3\cdot6+4\cdot8=18+32=50$.

Für die Vektorlängen gilt $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ und $|\vec{b}|=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$.

Es fällt auf, dass $5\cdot10=50$, also $\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

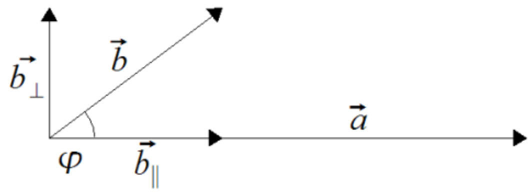
Ist das immer so? Das kann eine allgemeine Rechnung zeigen:

Wenn $\vec{a}\|\vec{b}$, dann gilt $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}$:

$$\vec{a}*\vec{b}=\vec{a}*(\lambda\cdot\vec{a})=\lambda\cdot\vec{a}^2=\lambda\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{pmatrix}=\lambda\cdot(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)=\lambda\cdot|\vec{a}|^2=|\vec{a}|\cdot\lambda\cdot|\vec{a}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

Zusammengefasst: Wenn zwei Vektoren senkrecht sind, ergibt das Skalarprodukt 0, wenn sie parallel sind, ergibt das Skalarprodukt das Produkt der Vektorlängen.
Was ist aber, wenn die Vektoren andere Winkel als 0° und 90° einschließen?

In nebenstehender Abbildung schließen die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen Winkel φ ein. $\vec{b}$ lässt sich zerlegen in die Vektorsumme $\vec{b}_\perp+\vec{b}_\|$. Damit gilt:



$$\vec{a}*\vec{b}=\vec{a}*(\vec{b}_\perp+\vec{b}_\|)=\vec{a}*\vec{b}_\perp+\vec{a}*\vec{b}_\|=0+\vec{a}*\vec{b}_\|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}_\||$$

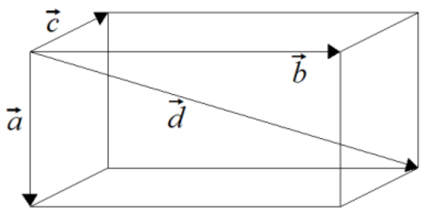
Zwischen φ, $\vec{b}$ und $\vec{b}_\|$ gilt die Beziehung $\cos\varphi=\frac{|\vec{b}_\||}{|\vec{b}|}$ $\rightarrow$ $|\vec{b}_\||=|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.

Damit gilt allgemein: $\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.

Kann man in der Gleichung $\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ die linke Seite mit Hilfe der Komponenten der Vektoren berechnen, lässt sich der Winkel φ bestimmen: $\cos\varphi=\frac{\vec{a}*\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Beispiel:

Zu nebenstehendem Quader wird der Koordinatenursprung so gewählt, dass er in der vorderen, oberen, linken Ecke ist.
Die Vektoren sind folgendermaßen definiert:



$\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$, also gilt $|\vec{a}|=4$; $|\vec{b}|=6$; $|\vec{c}|=3$.

Daraus folgt: $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\\-4\end{pmatrix}$ mit $|\vec{d}|=\sqrt{36+9+16}=\sqrt{61}$.

Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{d}$: $\cos\varphi_{ad}=\frac{\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}6\\3\\-4\end{pmatrix}}{4\cdot\sqrt{61}}=\frac{16}{4\cdot\sqrt{61}}=\frac{4}{\sqrt{61}}$ $\rightarrow$ $\varphi\approx 59{,}2\,°$

Winkel zwischen $\vec{b}$ und $\vec{d}$: $\cos\varphi_{bd}=\frac{\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}6\\3\\-4\end{pmatrix}}{6\cdot\sqrt{61}}=\frac{36}{6\cdot\sqrt{61}}=\frac{6}{\sqrt{61}}$ $\rightarrow$ $\varphi\approx 39{,}8\,°$

Winkel zwischen $\vec{c}$ und $\vec{d}$: $\cos\varphi_{cd}=\frac{\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}6\\3\\-4\end{pmatrix}}{9\cdot\sqrt{61}}=\frac{9}{3\cdot\sqrt{61}}=\frac{3}{\sqrt{61}}$ $\rightarrow$ $\varphi\approx 67{,}4\,°$