

## Produktregel der Differentialrechnung

Gegeben ist die Funktion  $f$ , deren Funktionsterm sich aus dem Produkt zweier von  $x$  abhängiger

Funktionen  $u$  und  $v$  zusammensetzt:  $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

Gesucht ist die Ableitung dieser Funktion.

Definition der Ableitung der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$ :  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x) + u(x_0) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \cdot v(x) + u(x_0) \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) + u(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0)$$

Beachten Sie das „Prinzip der hilfreichen Null“ in der ersten Zeile der Herleitung (in roter Schrift): Obwohl der rot geschriebene Teil des Terms insgesamt den Wert 0 hat, kann man ihn durch Trennen und unterschiedliche Zuordnung nutzen, um das Ergebnis zu erhalten.

Beispiel:

$$f(x) = x^2 \cdot \sin x \quad u(x) = x^2 \quad u'(x) = 2x \quad v(x) = \sin x \quad v'(x) = \cos x$$

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$