Polynomdivision

Das Rechenverfahren „Polynomdivision“ wendet man unter anderem bei folgenden Aufgabenstellungen an:

- Globalverlauf eines Funktionsgraphen
- Kürzen eines Bruchs
- Berechnung von Nullstellen
- Reihenentwicklung

Zunächst wird das Verfahren erklärt, dann folgt eine Beispielrechnung zu jeder der angegebenen Aufgabenstellungen.

Erinnert sei zunächst aber an das schriftliche Dividieren:

$$
\begin{array}{l}
59374:21=2827{,}333...\\
\underline{42}\\
173\\
\underline{168}\\
\quad 57\\
\quad \underline{42}\\
\quad 154\\
\quad \underline{147}\\
\qquad 70\\
\qquad \underline{63}\\
\qquad\ 7
\end{array}
$$

Man dividiert nicht sofort die ganze Zahl 59374 durch 21, sondern nur die Tausender- und die Zehntausenderstelle. Dazu probiert man, wie oft die ganz links stehende Ziffer durch 2 zu dividieren ist und schreibt dieses Ergebnis 2 hinter das Gleichheitszeichen.
Nun wird der Anteil 2·21=42 (eigentlich 42000) von 59374 subtrahiert, da dafür das Ergebnis 2 (eigentlich 2000) schon notiert ist.
Der Rest 17 wird mit der nächsten Ziffer 3 (also 173) dann wieder nach dem oben beschriebenen Verfahren durch 21 dividiert.
So geht es weiter, bis nur noch eine Zahl übrig ist, die kleiner als 21 ist.
Den Rest schreibt man dann als Bruch (hier $+\frac{7}{21}=+\frac{1}{3}$) hinter das Ergebnis 2827 oder man rechnet weiter, indem man ein Komma hinter 2827 setzt und weitere Nachkommastellen berechnet, indem man an den Rest jeweils eine (Nachkomma-)Null anhängt und weiter dividiert.
Würde man die Rechnung oben „ordentlich“, also nicht in der üblichen Kurzfassung, aufschreiben, so ergäbe sich $(42000+16800+420+147+7):21=2000+800+20+7+\frac{7}{21}$.

Ähnlich geht man auch bei der Polynomdivision vor, also bei einer Divisionsaufgabe, bei der zwei Polynome durcheinander dividiert werden (Polynome sind Summen von Produkten, die aus einer Zahl und der Potenz einer Variablen bestehen, wobei der Exponent nur jeweils eine ganze Zahl größer oder gleich 0 sein darf - Beispiel: $3+4\cdot x-2\cdot x^2+12\cdot x^6-543\cdot x^{32}$).

Angenommen, die Aufgabe lautet: $(120+x^3-34x-3x^2):(-5+x)=$.
Dann sortiert man zunächst in beiden Klammern nach Potenzen von x so, dass bei den Summanden die Hochzahlen der Potenzen von links nach rechts abnehmen:
$(x^3-3x^2-34x+120):(x-5)=$
Nun wird (analog zur Division von Zahlen) der erste Summand aus der linken Klammer durch den ersten Summanden aus der rechten Klammer dividiert. Das Ergebnis wird hinter das Gleichheitszeichen geschrieben und dann wird dieses Ergebnis mit der rechten Klammer multipliziert und unter die linke Klammer gesetzt. Zum Abschluss dieses Arbeitsschrittes wird dann vom Inhalt der linken Klammer das zuletzt Geschriebene subtrahiert.

$$
\begin{array}{l}
(x^3-3x^2-34x+120):(x-5)=x^2\\
\ \underline{x^3-5x^2}\\
\qquad +2x^2-34x+120
\end{array}
$$

Mit der ersten Division wurde so viel vom Inhalt der linken Klammer „verbraucht“, dass nun nur

$$(x^3-3x^2-34x+120):(x-5)=x^2+2x-24$$
$$\begin{array}{l} \underline{x^3-5x^2} \\ \quad +2x^2-34x+120 \\ \quad \underline{2x^2-10x \qquad\quad} \\ \qquad\quad -24x+120 \\ \qquad\quad \underline{-24x+120} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

noch $2x^2-34x+120$ übrig ist. Mit diesem Rest wird nun wie im ersten Arbeitsschritt weiter gerechnet.

Es sind in diesem Fall also insgesamt drei gleiche Arbeitsschritte notwendig, um die vollständige Division durchzuführen.

Zur Probe multipliziert man das Ergebnis rechts mit der rechten Klammer (x-5). Man erhält dann die linke Klammer.

Globalverlauf eines Funktionsgraphen

Gegeben ist folgende Funktionsgleichung: $f(x)=\dfrac{2x^3-4x^2+3x+6}{x^2-4}$.

Polynomdivision:

$$(2x^3-4x^2+3x+6):(x^2-4)=2x-4+\frac{11x-10}{x^2-4}$$
$$\begin{array}{l} \underline{2x^3 \qquad\quad -8x} \\ \quad -4x^2+11x+6 \\ \quad \underline{-4x^2 \qquad\quad +16} \\ \qquad\qquad 11x-10 \end{array}$$

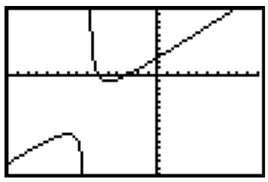
Hier bleibt ein Rest (11x kann nicht mehr durch x² dividiert werden).

Der Rest wird dadurch berücksichtigt, dass das Ergebnis der noch durchzuführenden Rechnung $(11x-10):(x^2-4)$ als Bruch angefügt wird.

Bei der Untersuchung des Globalverlaufs eines Funktionsgraphen kommt es wesentlich darauf an, wie sich der Graph für betragsmäßig große x-Werte verhält. Das Ergebnis der Polynomdivision zeigt uns das sehr einfach: Der Wert des Bruchs im Ergebnis wird um so kleiner, je größer x wird (der Grad des Nenners ist größer als der Grad des Zählers). Der Bruch spielt also für große x-Werte keine Rolle und die Funktionsgleichung kann angenähert durch $f(x)\approx 2x-4$ geschrieben werden. Der Globalverlauf ist also durch eine Gerade mit der Steigung 2 und dem y-Achsenabschnitt -4 gegeben.

Kürzen eines Bruchs

Die Funktionsgleichung $f(x)=\dfrac{x^3+5x^2-18x-72}{(x-4)\cdot(x+7)}$ hat folgenden Graph:



Bei $x=-7$ ist zwar der auf Grund der Funktionsgleichung erwartete Pol zu sehen, nicht aber bei $x=+4$. Es ist zu vermuten, dass bei $x=4$ eine hebbare Lücke besteht (Zähler und Nenner werden beim selben x-Wert 4 zu Null), die durch Kürzen des Bruchs mit $(x-4)$ aufgehoben werden kann. Der Zähler wird deshalb durch $(x-4)$ dividiert:

$$(x^3+5x^2-18x-72):(x-4)=x^2+9x+18$$
$$\begin{array}{l} \underline{x^3-4x^2 \qquad\qquad\quad} \\ \qquad 9x^2-18x-72 \\ \qquad \underline{9x^2-36x \qquad} \\ \qquad\quad +18x-72 \\ \qquad\quad \underline{+18x-72} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Wenn man den Bruch mit $(x-4)$ kürzt, erhält man folgende Funktionsgleichung ohne Lücke bei 4:

$$f(x)=\frac{x^2+9x+18}{(x+7)}$$

Berechnen von Nullstellen

Die Nullstellen der Funktion mit der Gleichung $f(x)=x^3+10x^2-19x-280$ sollen berechnet werden. Durch Probieren findet man die Nullstelle $x=5$. Der Funktionsterm muss also auch so geschrieben werden können: $f(x)=x^3+10x^2-19x-280=(x-5)\cdot(...)$.

Nun kann man durch Polynomdivision den fehlenden Inhalt der Klammer berechnen und danach mit der p-q-Formel die restlichen Nullstellen ermitteln:

$$\begin{array}{l}
(x^3+10x^2-19x-280):(x-5)=x^2+15x+56 \\
\underline{x^3-5x^2\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad 15x^2-19x-280 \\
\qquad \underline{15x^2-75x\qquad\quad} \\
\qquad\qquad\quad 56x-280 \\
\qquad\qquad\quad \underline{56x-280} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Der Funktionsterm ist nun umgeformt worden zu $f(x)=x^3+10x^2-19x-280=(x-5)\cdot(x^2+15x+56)$

Die rechte Klammer wird zu 0 gesetzt:

$$x^2+15x+56=0$$

$$x_{1,2}=-\frac{15}{2}\pm\sqrt{\frac{225}{4}-56}=-\frac{15}{2}\pm\sqrt{\frac{225}{4}-\frac{224}{4}}=$$

$$=-\frac{15}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=-\frac{15}{2}\pm\frac{1}{2}\rightarrow$$

$$x_1=-\frac{14}{2}=-7\ ;\ x_2=-\frac{16}{2}=-8$$

Der Funktionsterm ist nun faktorisiert worden zu $f(x)=(x-5)(x+7)(x+8)$.
Damit liegen die Nullstellen bei $x=5\ ;\ x=-7\ ;\ x=-8$.

Reihenentwicklung

Für x-Werte zwischen 0 und 1 soll der Bruch $\frac{1}{1+x}$ so umgeformt werden, dass er zu einem unendlich langen Polynom wird.

$$\begin{array}{l}
1:(1+x)=1-x+x^2-x^3+x^4\mp... \\
\underline{1+x} \\
\quad -x \\
\quad \underline{-x-x^2} \\
\qquad\quad x^2 \\
\qquad\quad \underline{x^2+x^3} \\
\qquad\qquad -x^3 \\
\qquad\qquad \underline{-x^3-x^4} \\
\qquad\qquad\qquad x^4
\end{array}$$

Da x zwischen 0 und 1 liegt, werden die Werte der Summanden nach rechts hin immer kleiner und die Summe nähert sich mit jedem Summanden dem exakten Wert des Bruchs weiter an.

Beispiel für $x=\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}=0,\overline{6}$$

$$1=1$$

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=0,5$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0,75$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}=0,625$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}=0,6875$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}=\frac{21}{32}=0,65625$$