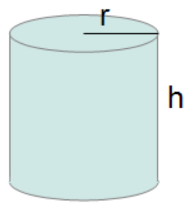
Extremwertaufgabe: Konservendose mit minimalem Materialverbrauch

Aufgabe: Eine Konservendose mit gegebenem Volumen soll so gestaltet werden, dass möglichst wenig Material für die Dose benötigt wird. Die Dicke des Blechs und das für die Falze benötigte Material sind zu vernachlässigen. Gefragt sind der Radius der Deckel- und Bodenfläche und die Höhe der Konservendose.



Lösung:

Die Aufgabe besteht darin, die minimale Oberfläche eines Zylinders bei gegebenem Volumen zu finden.

Das Volumen eines Zylinders berechnet sich aus Grundfläche (Kreis) mal Höhe: $V=\pi r^2 \cdot h$.

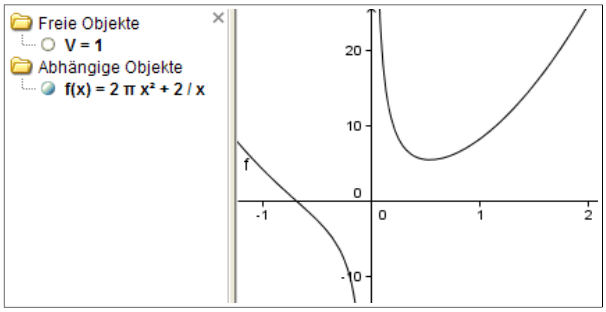
Die Oberfläche eines Zylinders berechnet sich aus 2 Kreisflächen (Deckel und Boden) und einer Rechtecksfläche (abgerollter Mantel): $O(r,h)=2\cdot\pi r^2+2\pi r\cdot h$.

Die Funktionswerte der Oberflächenfunktion sind abhängig von 2 Variablen (r und h).

Mit Hilfe der Volumenformel kann die Variable h durch einen Term mit r ersetzt werden:

$$V=\pi r^2 h \;\rightarrow\; h=\frac{V}{\pi r^2} \;\rightarrow\; O(r,h)=2\pi r^2+2\pi r h=2\pi r^2+2\pi r\,\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r}=O(r)$$

Wie man sieht, hat der Graph der Oberflächenfunktion für V=1 und für positive r-Werte (bzw. x-Werte) ein Minimum bei etwa 0,5.



Rechnerisch findet man das Minimum mit Hilfe der zu 0 gesetzten 1. Ableitung:

$$O'(r)=4\pi r-\frac{2V}{r^2}\overset{!}{=}0 \;\rightarrow\; 4\pi r=\frac{2V}{r^2} \;\rightarrow$$

$$r^3=\frac{2V}{4\pi}=\frac{V}{2\pi} \;\rightarrow\; r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Zur Überprüfung auf die Eigenschaft „Minimum“ wird die 2. Ableitung gebildet:

$$O''(r)=4\pi+\frac{4V}{r^3}$$

Da V>0 und r>0, ist der Term der 2. Ableitung positiv, d.h. es liegt ein Minimum vor.

Die Höhe h lässt sich nun aus r bestimmen: $h=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}^{2}}=\frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}}=\sqrt[3]{\frac{V^3}{\pi^3\cdot\frac{V^2}{4\pi^2}}}=\sqrt[3]{\frac{4\pi^2V^3}{\pi^3V^2}}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

Verdoppelt man r, so ergibt sich $2\cdot r=2\cdot\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=\sqrt[3]{\frac{8V}{2\pi}}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

Man sieht: $h=2r$. Die optimale Konservendose hat also einen quadratischen Querschnitt.

Berechnung der minimalen Oberfläche in Abhängigkeit vom gegebenen Volumen:

$$O=2\pi r^2+2\pi r h=2\pi\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}^{2}+2\pi\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}=\sqrt[3]{\frac{8\pi^3V^2}{4\pi^2}}+2\sqrt[3]{\frac{2\pi^3V^2}{\pi^2}}=\sqrt[3]{2\pi V^2}+2\sqrt[3]{2\pi V^2}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

Für V=1 ergibt sich $r=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\approx 0{,}54$, $h=2r\approx 1{,}08$ und $O=3\sqrt[3]{2\pi}\approx 5{,}5$.