Integralrechnung 2

Im Dokument "Integralrechnung 1" wurde über die Berechnung von Flächeninhalten eine Einführung in die Integralrechnung gegeben.

Während für praktisch alle Funktionen, die an Gymnasien untersucht werden, die Ableitung problemlos über entsprechende Algorithmen berechnet werden kann, stößt man bei der entgegengesetzten Rechenart, dem Integrieren, schnell an Grenzen. Integrieren ist im Prinzip ein Raten: "Suche die Stammfunktion, deren Ableitung die gegebene Funktion ist".

Für einfache Potenzfunktionen, trigonometrische Funktionen und Exponential- sowie Logarithmusfunktionen lernt man geeignete Verfahren kennen, die sicher zur Lösung führen. Sobald es sich aber um zusammengesetze Funktionsterme handelt, müssen häufig spezielle Verfahren angewendet werden, um das Ziel zu erreichen.

Hier werden drei dieser speziellen Verfahren erläutert: Integration mit Hilfe von Substitution, partielle Integration oder Produktintegration und Integration durch Partialbruchzerlegung.

---

1 Integration mit Hilfe von Substitution

Beispiel 1: $f(x)=(2x+8)^4$ gesucht ist $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Mit der Standardmethode müsste nun die Klammer aufgelöst werden. Dann könnte man die Summanden einzeln integrieren:

$$\int_0^2 (2x+8)^4\,dx=\int_0^2 (16x^4+256x^3+1536x^2+4096x+4096)\,dx=$$

$$\left[\frac{16}{5}\cdot x^5+\frac{256}{4}\cdot x^4+\frac{1536}{3}\cdot x^3+\frac{4096}{2}\cdot x^2+4096x\right]_0^2=\frac{16}{5}\cdot 32+64\cdot 16+512\cdot 8+2048\cdot 4+4096\cdot 2=21606{,}4$$

Einfacher ist es, eine neue Variable z mit dem Wert $2x+8$ einzuführen, $2x+8$ also durch z zu ersetzen (oder zu substituieren), weil man dann nur den Term z^4 zu integrieren hat. Es muss dann noch dx durch dz ersetzt werden und für die Integrationsgrenzen muss man z-Werte berechnen. Man schreibt die Ableitung mit der Leipnizschen Schreibweise:

$$z=2x+8 \;\rightarrow\; \frac{dz}{dx}=2 \;\rightarrow\; dz=2\cdot dx \;\rightarrow\; dx=\frac{1}{2}\cdot dz \quad ; \quad x_u=0\rightarrow z_u=2\cdot 0+8=8 \quad ; \quad x_o=2\rightarrow z_o=2\cdot 2+8=12$$

Daraus folgt $\int_{x_u=0}^{x_o=2} (2x+8)^4\,dx=\int_{z_u=8}^{z_o=12} z^4\cdot\frac{1}{2}dz=\left[\frac{z^5}{5}\cdot\frac{1}{2}\right]_8^{12}=\frac{12^5}{10}-\frac{8^5}{10}=24883{,}2-3276{,}8=21606{,}4$

Das Ergebnis lässt sich durch Substitution also auf einfachere Art erhalten.

Beispiel 2: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx$

Man substituiert $z = \cos x$ → $\frac{dz}{dx} = -\sin x$ → $dx = \frac{-1}{\sin x} dz$; $x_1 = 0 \rightarrow z_1 = 1$; $x_2 = \frac{\pi}{4} \rightarrow z_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

Daraus folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_1^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}} \frac{\sin x}{z} \cdot \frac{-1}{\sin x} dz = \int_1^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}} \frac{-1}{z} dz = \left[-\ln|z|\right]_1^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}} = -\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right) \approx 0{,}347$$

Wenn also der Zähler der zu integrierenden Funktion die Ableitung des Nenners ist, substituiert man z als Nenner und erhält als Stammfunktion $\ln|z|$.

Beispiel 3: $\int_0^1 2x \cdot e^{x^2} dx$

Substitution $z = x^2$ → $\frac{dz}{dx} = 2x$ → $dx = \frac{1}{2x} dz$; $x_1 = 0 \rightarrow z_1 = 0$; $x_2 = 1 \rightarrow z_2 = 1$

Daraus folgt $\int_0^1 2x \cdot e^{x^2} dx = \int_0^1 2x \cdot e^z \cdot \frac{1}{2x} dz = \int_0^1 e^z dz = \left[e^z\right]_0^1 = e - 1$

---

2 Partielle Integration oder Produktintegration

Mit Hilfe der Produktregel der Differentialrechnung lassen sich Integrale von Funktionen, die sich aus Produkten einfacher Funktionen zusammensetzen, ggf. leichter berechnen:

Mit der Funktion f und der Funktionsgleichung $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ bildet man folgendermaßen die Ableitung: $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ oder einfacher geschrieben $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation.
Dann ergibt sich durch Integration der beiden Seiten der Gleichung

$$\int_a^b (u \cdot v)' dx = \int_a^b (u' \cdot v) dx + \int_a^b (u \cdot v') dx \rightarrow [u \cdot v]_a^b = \int_a^b (u' \cdot v) dx + \int_a^b (u \cdot v') dx$$

Durch Umstellung der einzelnen Summanden erhält man folgende zwei Formeln:

$$\int_a^b (u' \cdot v) dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b (u \cdot v') dx \qquad \int_a^b (u \cdot v') dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b (u' \cdot v) dx$$

Diese Formeln helfen zur Berechnung des linken Integrals, wenn der Integrand auf der rechten Seite einfacher zu integrieren ist als der auf der linken Seite.

Einige Beispiele sollen die Anwendungsmöglichkeiten zeigen. Bei der Berechnung der unbestimmten Integrale wird hier der konstante Summand in der Stammfunktion vernachlässigt.

Beispiel 1: $\int x \cdot e^x \, dx =$

$u = x \;\; ; \;\; v' = e^x \;\rightarrow\; u' = 1 \;\; ; \;\; v = e^x$

$\int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{e^x} \, dx = \underset{u}{x} \cdot \underset{v}{e^x} - \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{e^x} \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x$

Beispiel2: $\int x^2 \cdot \cos x \, dx =$

$u = x^2 \;\; ; \;\; v' = \cos x \;\rightarrow\; u' = 2x \;\; ; \;\; v = \sin x$

$\int \underset{u}{x^2} \cdot \underset{v'}{\cos x} \, dx = \underset{u}{x^2} \cdot \underset{v}{\sin x} - \int \underset{u'}{2x} \cdot \underset{v}{\sin x} \, dx$

Nebenrechnung: $\int \underset{U}{2x} \cdot \underset{V'}{\sin x} \, dx = \underset{U}{2x} \cdot \underset{V}{(-\cos x)} - \int \underset{U'}{2} \cdot \underset{V}{(-\cos x)} \, dx = -2x \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x$

also $\int x^2 \cdot \cos x \, dx = x^2 \cdot \sin x - \int 2x \cdot \sin x \, dx = x^2 \cdot \sin x - (-2x \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x) \;\rightarrow$

$\int x^2 \cdot \cos x \, dx = x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \cdot \sin x$

Beispiel 3: $\int \ln x \, dx =$

Man schreibe $\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx =$ mit $u' = 1 \;\; ; \;\; v = \ln x \;\rightarrow\; u = x \;\; ; \;\; v' = \frac{1}{x}$

$\int \ln x \, dx = \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\ln x} \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x$

Beispiel 4: $\int \sin x \cdot \cos x \, dx =$

$u = \sin x \;\; ; \;\; v' = \cos x \;\rightarrow\; u' = \cos x \;\; ; \;\; v = \sin x$

$\int \underset{u}{\sin x} \cdot \underset{v'}{\cos x} \, dx = \underset{u}{\sin x} \cdot \underset{v}{\sin x} - \int \underset{u'}{\cos x} \cdot \underset{v}{\sin x} \, dx \;\rightarrow\; 2 \cdot \int \sin x \cdot \cos x \, dx = \sin^2 x \;\rightarrow\; \int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2}$

man kann auch den Ansatz wählen $u' = \sin x \;\; ; \;\; v = \cos x \;\rightarrow\; u = -\cos x \;\; ; \;\; v' = -\sin x$

$\int \underset{u'}{\sin x} \cdot \underset{v}{\cos x} \, dx = \underset{u}{-\cos x} \cdot \underset{v}{\cos x} - \int \underset{u}{(-\cos x)} \cdot \underset{v'}{(-\sin x)} \, dx \;\rightarrow\; 2 \cdot \int \sin x \cdot \cos x \, dx = -\cos^2 x \;\rightarrow$

$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{-\cos^2 x}{2}$

Schüler sind hier oftmals wegen der anscheinend unterschiedlichen Ergebnisse verwirrt, denn die Gleichung $\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{-\cos^2 x}{2}$ ergibt nicht für alle x eine richtige Aussage.

Lösung des "Widerspruchs" ist, dass jeweils nur eine einzige Stammfunktion berechnet wurde. Es existieren aber unendlich viele Stammfunktionen, wenn man die additive Konstante hinzufügt.

Mit $\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C_1 = \frac{-\cos^2 x}{2} + C_2$ löst sich der scheinbare Widerspruch auf, wenn man z. B. $C_1 = 0$ und $C_2 = \frac{1}{2}$ wählt: $\frac{\sin^2 x}{2} \overset{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}{=} \frac{1-\cos^2 x}{2} = \frac{-\cos^2 x}{2} + \frac{1}{2}$

Anmerkung: Das Integral $\int \sin x \cdot \cos x \, dx =$ lässt sich auch gut mit Substitution lösen:

$z = \sin x \rightarrow \frac{dz}{dx} = \cos x \rightarrow dx = \frac{1}{\cos x} dz$

$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \int z \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} dz = \int z \, dz = \frac{z^2}{2} \overset{z=\sin x}{=} \frac{\sin^2 x}{2}$

Ein weiteres Beispiel für partielle Integration findet man in diesem Dokument, in dem u. a. die Rekursionsformel $\int \sin^n x \, dx = \frac{-\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \int \sin^{n-2} x \, dx$ hergeleitet wird.

---

3 Partialbruchzerlegung

Das Integral $\int \frac{6}{x^2 + x - 2} dx$ ist zu berechnen. Um zur Lösung zu gelangen, faktorisiert man den Nenner. Dann schreibt man den Bruchterm als Summe von Brüchen, in denen im Nenner x nur linear vorkommt, da sich solche Integrale leicht berechnen lassen:

$\int \frac{a}{b \cdot x + c} dx = \frac{a}{b} \cdot \int \frac{1}{x + \frac{c}{b}} dx = \frac{a}{b} \cdot \ln \left| x + \frac{c}{b} \right|$

Faktorisierung des Nenners: $x^2 + x - 2 = (x-1) \cdot (x+2)$

Ansatz $\frac{6}{(x-1) \cdot (x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A \cdot (x+2) + B \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+2)} \rightarrow 6 = A \cdot (x+2) + B \cdot (x-1)$

Gesucht sind nun Werte für A und B, sodass die Gleichung für alle x eine wahre Aussage ergibt.

Es gilt $6 = A \cdot (x+2) + B \cdot (x-1) = A \cdot x + 2A + B \cdot x - B = (A+B) \cdot x + (2A - B)$

Ein Koeffizientenvergleich bei $0 \cdot x + 6 = (A+B) \cdot x + (2A - B)$ ergibt $A + B = 0$ und $2A - B = 6$

Wegen $A = -B$ gilt $2A + A = 6 \rightarrow 3A = 6 \rightarrow A = 2 \rightarrow B = -2$

Es gilt $\frac{6}{(x-1)\cdot(x+2)}=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+2}$

Daraus folgt $\int \frac{6}{x^2+x-2}\,dx=\int \frac{6}{(x-1)\cdot(x+2)}\,dx=\int \left(\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+2}\right)dx=2\cdot\ln|x-1|-2\cdot\ln|x+2|$

Ist eine Klammer im Nenner potenziert, so geht man für die Zerlegung des Bruchs nach folgendem Schema vor:

$$\frac{1}{(x-2)^3\cdot(x+1)^4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{D}{x+1}+\frac{E}{(x+1)^2}+\frac{F}{(x+1)^3}+\frac{G}{(x+1)^4}$$

Lässt sich der Nenner nicht in lineare Faktoren zerlegen, so muss der Zähler in der Form Ax+B angesetzt werden.

Beispiel: $\int \frac{4x}{(x-1)\cdot(x^2+1)}\,dx$

Ansatz:

$$\frac{4x}{(x-1)\cdot(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A\cdot x^2+A+(B\cdot x+C)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x^2+1)}=\frac{A\cdot x^2+A+B\cdot x^2-B\cdot x+C\cdot x-C}{(x-1)\cdot(x^2+1)} \rightarrow$$

$$\frac{4x}{(x-1)\cdot(x^2+1)}=\frac{(A+B)\cdot x^2+(C-B)\cdot x+(A-C)}{(x-1)\cdot(x^2+1)} \overset{\text{Koeffizientenvergleich}}{\rightarrow} A+B=0 \;;\; C-B=4 \;;\; A-C=0$$

Daraus folgt (von rechts nach links)

$A+B=0 \rightarrow A=-B \;;\; A-C=0 \rightarrow A=C \;;\; C-B=A+A=4 \rightarrow 2\cdot A=4 \rightarrow A=2=C \rightarrow B=-2$

$$\int \frac{4x}{(x-1)\cdot(x^2+1)}\,dx=\int \left(\frac{2}{x-1}+\frac{-2\cdot x+2}{x^2+1}\right)dx=\int \frac{2}{x-1}\,dx-\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx+2\cdot\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \overset{\text{Substitution } z=x^2+1}{=}$$

$$2\cdot\ln|x-1|-\int \frac{2x}{z}\cdot\frac{1}{2x}\,dz+2\cdot\arctan x=2\cdot\ln|x-1|-\int \frac{1}{z}\,dz+2\cdot\arctan x=$$

$$2\cdot\ln|x-1|-\ln|z|+2\cdot\arctan x=2\cdot\ln|x-1|-\ln|x^2+1|+2\cdot\arctan x$$