2016-02-09 Klausur 3 Kurs 12ma5 Mathematik

Lösung

1 Ein Teller wird mit Eintopf der Temperatur 95°C gefüllt und dann auf den Tisch gestellt, dessen Umgebungstemperatur 25°C beträgt. Im Laufe 1 Minute kühlt sich das Essen um 10% des Temperaturunterschieds (Suppen- und Raumtemperatur zu Beginn der Minute) ab.

1.1 Begründen Sie, welche der gegebenen Formeln auf diesen Vorgang anwendbar ist.

Es handelt sich hier um begrenztes Wachstum, da zu Beginn die größte Temperaturabnahme vorhanden ist. Bei logistischem Wachstum müsste die Temperaturabnahme zunächst zunehmen und dann abnehmen.

1.2 Berechnen Sie den Faktor k in der entsprechenden Formel (siehe Seite 2 unten). (Ergebnis: 0,10536)

Zu Beginn beträgt die Temperatur 95°C, also $f(0)=95$ *, und die Sättigungsgrenze 25°C, also* $S=25$ *. Außerdem kennt man für den Zeitpunkt 1 Minute, also t=1, die Temperatur* $f(1)=95-0{,}1\cdot(95-25)=95-0{,}1\cdot 70=95-7=88$ *.*

Daraus folgt $f(t)=(f(0)-S)\cdot e^{-k\cdot t}+S \rightarrow (f(0)-S)\cdot e^{-k\cdot t}=f(t)-S \rightarrow e^{-k\cdot t}=\frac{f(t)-S}{f(0)-S} \rightarrow$

$$-k\cdot t=\ln\left(\frac{f(t)-S}{f(0)-S}\right) \rightarrow k=\frac{-1}{t}\cdot\ln\left(\frac{f(t)-S}{f(0)-S}\right) \overset{t=1}{\rightarrow} k=-\ln\left(\frac{88-25}{95-25}\right)=-\ln\frac{63}{70}\approx 0{,}10536 .$$

1.3 Wegen eines wichtigen Telefongesprächs wird die Suppe erst 15 Minuten nach dem Auffüllen gegessen. Berechnen Sie die Temperatur der Suppe zu Beginn des Essens.

$$f(t)=(f(0)-S)\cdot e^{-k\cdot t}+S=(95-25)\cdot e^{-0{,}10536\cdot t}+25=70\cdot e^{-0{,}10536\cdot t}+25 \overset{t=15}{\rightarrow} f(15)=70\cdot e^{-0{,}10536\cdot 15}+25\approx 39{,}4$$

Die Temperatur der Suppe beträgt bei Essensbeginn also knapp 40°C.

---

2 Das Wachstum einer Sonnenblume lässt sich durch die Gleichung $f(t)=\frac{200}{1+24\cdot e^{-0{,}8\cdot t}}$ beschreiben (die Zeit wird in Wochen, die Größe in cm angegeben).

2.1 Berechnen Sie, wie groß die Sonnenblume zu Beginn der Messung war.

$$f(0)=\frac{200}{1+24\cdot e^{-0{,}8\cdot 0}}=\frac{200}{1+24\cdot e^{0}}=\frac{200}{1+24\cdot 1}=\frac{200}{25}=8$$

Die Sonnenblume war zu Beginn also 8 cm hoch.

2.2 Wie groß ist die Sonnenblume, wenn sie ihre größte Wachstumsgeschwindigkeit hat? Lösung ohne schriftliche Rechnung möglich, dann aber mit Begründung.

In der Formel steht die Sättigungsgrenze S im Zähler, ist hier also 200 (d. h. 200 cm).
Ist y der aktuelle Funktionswert, so ist beim logistischen Wachstum der Zuwachs Δy *proportional zu y und proportional zu dem, was noch am Sättigungswert S fehlt:*
$\Delta y \sim y \;;\; \Delta y \sim S-y \rightarrow \Delta y \sim y\cdot(S-y)$ *. Das Produkt ist dann am größten, wenn beide Faktoren gleich groß sind, also wenn* $y=\frac{S}{2}=\frac{200}{2}=100$ *.*

2.3 Berechnen Sie, wann die Sonnenblume 95% ihrer Maximalhöhe erreicht hat. Vorgehen (Rechnung oder Taschenrechner) erläutern.

95% der Maximalhöhe sind $0{,}95\cdot 200=190$ *. Einsetzen in die Formel und auflösen nach t:*

$190=\frac{200}{1+24\cdot e^{-0{,}8\cdot t}}$ → $1+24\cdot e^{-0{,}8\cdot t}=\frac{200}{190}$ → $24\cdot e^{-0{,}8\cdot t}=\frac{200}{190}-1=\frac{10}{190}$ → $e^{-0{,}8\cdot t}=\frac{10}{190\cdot 24}=\frac{1}{456}$ →
$-0{,}8\cdot t=\ln\left(\frac{1}{456}\right)=\ln 1-\ln 456=-\ln 456$ → $t=\frac{\ln 456}{0{,}8}\approx 7{,}65$

Es dauert also etwa 7,65 Wochen, bis die Sonnenblume 95% ihrer Maximalhöhe erreicht hat.

---

3 Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch die Gleichung $f_a(x)=\frac{a\cdot x^2}{x-a}$.

3.1 Berechnen Sie die Gleichung der Ortskurve der Extrempunkte dieser Funktionenschar.

Extrempunkte finden: 1. Ableitung gleich 0 setzen.

$$f_a'(x)=\frac{2ax\cdot(x-a)-ax^2\cdot 1}{(x-a)^2}=\frac{2ax^2-2a^2x-ax^2}{(x-a)^2}=\frac{ax^2-2a^2x}{(x-a)^2}\overset{!}{=}0 \rightarrow$$

$$ax^2-2a^2x=0 \rightarrow ax\cdot(x-2a)=0 \rightarrow ax=0 \text{ oder } x-2a=0 \rightarrow x_1=0 \ ; \ x_2=2a \rightarrow a=\frac{x}{2}$$

Die Lösung x=0 ist nicht sinnvoll, da x nicht von a abhängig ist.

Einsetzen des a-Wertes der Lösung x_2 in die Funktionsgleichung:

$$y=\frac{\frac{x}{2}\cdot x^2}{x-\frac{x}{2}}=\frac{\frac{x^3}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{x^3}{x}=x^2$$ *Ortskurve ist also die Normalparabel mit der Gleichung $y=x^2$.*

3.2 Zeigen Sie rechnerisch, dass sich zwei beliebige Kurven der Schar immer schneiden und machen Sie auf Grund der Rechnung eine allgemeine Aussage über die Orte, wo diese Schnittpunkte zu finden sind.

Die Parameter zweier beliebiger Kurven seien a und b mit $a\neq b$.
Gleichsetzen der Funktionsterme:

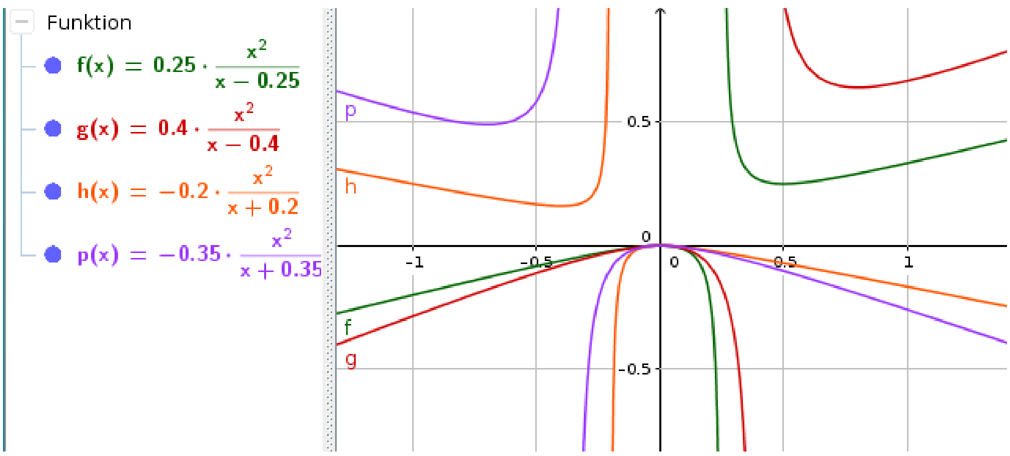
$$f_a(x)=f_b(x) \rightarrow \frac{a\cdot x^2}{x-a}=\frac{b\cdot x^2}{x-b} \rightarrow ax^2\cdot(x-b)=bx^2\cdot(x-a) \overset{x\neq 0}{\rightarrow} a\cdot(x-b)=b\cdot(x-a) \rightarrow$$

$$ax-ab=bx-ba \rightarrow ax=bx \rightarrow ax-bx=0 \rightarrow (a-b)\cdot x=0$$

Da a ungleich b sein soll, kann die linke Klammer nicht 0 sein. Es bleibt also nur die Lösung x=0. Während des 2. Teils der Rechnung musste zwar wegen der Division durch x² der Wert von x ungleich 0 sein, aber in der Ausgangsgleichung sieht man, dass x=0 diese Gleichung erfüllt.

Alle Graphen der Schar schneiden sich also bei x=0 im Punkt (0/0).

Beispiel für einige Scharkurven:



4 Bei der Planung eines Deiches wird für den Querschnitt die Funktionsgleichung $f(x)=(2x+1)\cdot e^{-x}$ zu Grunde gelegt.

4.1 Berechnen Sie den x-Wert, an dem die Seeseite des Deiches (x>1) die betragsmäßig größte Steigung besitzt.

Gesucht ist der Wendepunkt, da in ihm die Steigung betragsmäßig am größten ist.

$f(x)=(2x+1)\cdot e^{-x}$

$f'(x)=2\cdot e^{-x}+(2x+1)\cdot(-1)\cdot e^{-x}=(2-2x-1)\cdot e^{-x}=(-2x+1)\cdot e^{-x}$

$f''(x)=-2\cdot e^{-x}+(-2x+1)\cdot(-1)\cdot e^{-x}=(-2+2x-1)\cdot e^{-x}=(2x-3)\cdot e^{-x}$

$f'''(x)=2\cdot e^{-x}+(2x-3)\cdot(-1)\cdot e^{-x}=(2-2x+3)\cdot e^{-x}=(-2x+5)\cdot e^{-x}$

2. Ableitung gleich 0 setzen: $(2x-3)\cdot e^{-x}=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

(Nur 1 Lösung, weil der 2. Faktor nicht zu 0 werden kann).
Bei x=1,5 liegt also das größte Gefälle vor.

4.2 Um den Deich anlegen zu können, benötigt man den Flächeninhalt der Fläche, die vollkommen von dem Graphen und der x-Achse eingeschlossen wird.
Ermitteln Sie mit Hilfe der Kenntnis der ersten Ableitungen dieser Funktion eine Stammfunktion (Ergebnis: $\int f(x)dx=(-2x-3)\cdot e^{-x}$) und berechnen Sie die Fläche zwischen x=0 und x=4.

Bei den unter 4.1 durchgeführten Ableitungen sieht man, dass für die Klammer im Funktionsterm folgende Regeln gelten:
Das Vorzeichen von 2x wechselt bei jeder weiteren Ableitung.
Auch das Vorzeichen der Zahl ändert sich jeweils. Gleichzeitig ändert sich der Betrag des Wertes um 2.
Da Integrieren die Umkehrrechenart zum Differenzieren ist, kommt man zur Stammfunktion, indem man bei der Ausgangsfunktion die Vorzeichen von 2x und der Zahl wechselt und gleichzeitig den Zahlenwert um 2 verringert. Daraus folgt: $\int f(x)dx=(-2x-3)\cdot e^{-x}$.

$$\int_0^4 f(x)dx=\left[(-2x-3)\cdot e^{-x}\right]_0^4=\left((-2\cdot 4-3)\cdot e^{-4}\right)-\left(-3\cdot e^{0}\right)\approx 2{,}7985$$

Begrenztes Wachstum mit Sättigungsgrenze S

$f(t)=a\cdot e^{-k\cdot t}+S$ bzw. $f(t)=(f(0)-S)\cdot e^{-k\cdot t}+S$

Logistisches Wachstum

$f(t)=\frac{S}{1+a\cdot e^{-k\cdot S\cdot t}}$ bzw. $f(t)=\frac{S}{1+\left(\frac{S}{f(0)}-1\right)\cdot e^{-k\cdot S\cdot t}}$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Klausur!