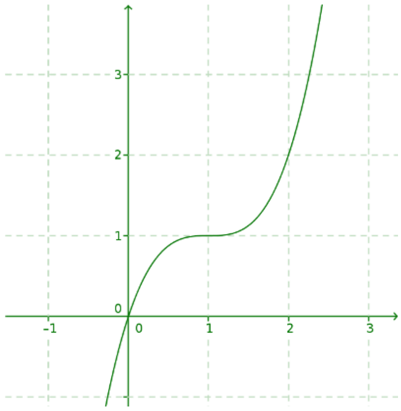
2015-06-17 Klassenarbeit 4 Klasse 10e Mathematik

Lösung

„berechne algebraisch" bedeutet: Berechne ohne Hilfe des Taschenrechners. Für Strich- und Punktrechnung, Potenzieren und Wurzelziehen darf der Taschenrechner aber benutzt werden.

---

1 Die Funktion f mit der Gleichung $f(x)=x^3-3x^2+3x$ ist gegeben.



1.1 Gib an, wie viel Nullstellen maximal vorhanden sein können und berechne algebraisch die vorhandenen Nullstellen.

Da die Funktion vom grad 3 ist, gibt es maximal 3 Nullstellen.

Bedingung für Nullstelle:
$f(x)=0 \rightarrow x^3-3x^2+3x=0 \rightarrow x\cdot(x^2-3x+3)=0 \rightarrow$

1. Faktor: $x_1=0$; 2. Faktor: $x_{2,3}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-3}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{12}{4}}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}$

Wegen der negative Zahl unter der Wurzel gibt es keine Lösung und somit nur 1 Nullstelle bei x=0.

1.2 Bestimme die Krümmung („links" oder „rechts") an der Stelle $x=4$ und begründe diese Angabe durch algebraische Rechnung.

Das Krümmungsverhalten ergibt sich aus dem Vorzeichen der 2. Ableitung:
$f'(x)=3x^2-6x+3 \rightarrow f''(x)=6x-6$

Für die angegebene Stelle gilt $f''(4)=24-6=18>0$ *. Es liegt also eine Linkskrümmung vor.*

1.3 Gib die Intervalle an, in denen der Funktionsgraph monoton steigt und die Intervalle, in denen der Funktionsgraph monoton fällt und begründe die Antwort durch algebraische Rechnung.

Die Richtung der Monotonie ergibt sich aus der 1. Ableitung:
monoton steigend: $f'(x)\geq 0 \rightarrow 3x^2-6x+3\geq 0$ *Zunächst Lösung der Gleichung* $3x^2-6x+3=0$ *:*

$3x^2-6x+3=0 \rightarrow x^2-2x+1=0 \rightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-1}=1\pm 0 \rightarrow x_1=x_2=1$.

Die einzige Möglichkeit für einen Wechsel des Steigungsverhaltens besteht also bei $x=1$ *.*
Die doppelte Lösung weist aber schon darauf hin, dass sich das Steigungsverhalten nicht ändert.
Zur Sicherheit Probe mit 2 Werten größer und kleiner als 1: $f'(0)=3>0$; $f'(2)=12-12+3=3>0$
Im gesamten Definitionsbereich $]-\infty;+\infty[$ *ist der Graph also monoton steigend.*
Strenge Monotonie liegt aber nicht vor, da bei x=1 die Steigung 0 beträgt (Sattelpunkt, siehe Graph).

1.4 Begründe durch algebraische Rechnung oder durch logische Schlussfolgerung, dass der Funktionsgraph punktsymmetrisch zum Punkt $(1/1)$ ist.
Hilfe: $(-a+b)^3=-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3$

algebraische Rechnung: Bedingung $f(x)=-f(-x+2u)+2v=-f(-x+2)+2$

$f(-x+2)=(-x+2)^3-3\cdot(-x+2)^2+3\cdot(-x+2)=\left(-x^3+6x^2-12x+8\right)-3\cdot\left(x^2-4x+4\right)-3x+6=$

$-x^3+6x^2-12x+8-3x^2+12x-12-3x+6=-x^3+3x^2-3x+2$

$-f(-x+2)+2=x^3-3x^2+3x-2+2=x^3-3x^2+3x=f(x)$

logische Schlussfolgerung: Alle Funktionsgleichungen vom grad 3 haben einen punktsymmetrischen Graph. Damit muss das Krümmungsverhalten auf beiden Seiten des Spiegelpunktes verschieden sein. Der Spiegelpunkt muss also der Wendepunkt sein.
Den Wendepunkt erhält man durch Nullsetzen der 2. Ableitung:

$f''(x)=6x-6\overset{!}{=}0 \;\rightarrow\; 6x=6 \;\rightarrow\; x=1 \;\rightarrow\; f(1)=1-3+3=1$

Da $(1/1)$ der Wendepunkt ist, ist er also auch der Symmetriepunkt.

2

Berechne algebraisch mit Hilfe der Polynomdivision alle Nullstellen der Funktion f mit der Gleichung $f(x)=x^3-2x^2-19x+20$. „Rate“ zunächst die Nullstelle $x=1$.

Das „Raten“ $x=1$ liefert den Faktor $(x-1)$ für den Funktionsterm: $f(x)=(x-1)\cdot(...)$.
Den Inhalt der 2. Klammer erhält man durch Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3-2x^2-19x+20):(x-1)=x^2-x-20 \\
\underline{x^3-\;\;x^2} \\
\quad -x^2-19x+20 \\
\quad \underline{-x^2+\;\;\;x} \\
\qquad\quad -20x+20 \\
\qquad\quad \underline{-20x+20} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Es gilt also $f(x)=(x-1)\cdot(x^2-x-20)$

Zerlegen der 2. Klammer: $x_{2,3}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+20}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{80}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{9}{2} \rightarrow x_2=5 \;;\; x_3=-4$

$f(x)=(x-1)\cdot(x+4)\cdot(x-5)$ *Daraus folgt: Nullstellen liegen bei* $x_{N1}=1 \;;\; x_{N2}=-4 \;;\; x_{N3}=5$.

3

Skizziere jeweils einen möglichen Graphen einer Funktion mit folgenden Eigenschaften und gib den kleinstmöglichen Grad der jeweiligen Funktion an
<u>oder</u>
begründe, warum eine Funktion mit den angegebenen Eigenschaften nicht existieren kann.

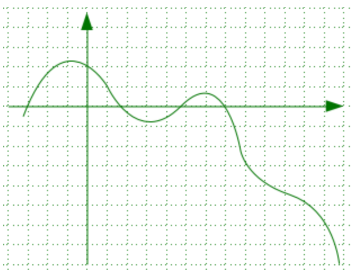
Achtung: Die Anzahl der angegebenen besonderen Stellen muss genau eingehalten werden.

3.1 2 Hochpunkte, 1 Tiefpunkt, 4 Wendepunkte, 4 Nullstellen *grad* ≥ 6

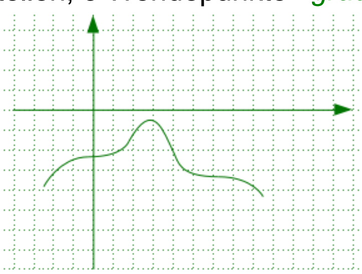
3.2 2 Sattelpunkte, 1 Hochpunkt, 0 Nullstellen *grad* ≥ 6

3.3 2 Wendepunkte, 1 Tiefpunkt, 3 Nullstellen
nicht möglich: bei 1 Extrempunkt höchstens 2 Nullstellen

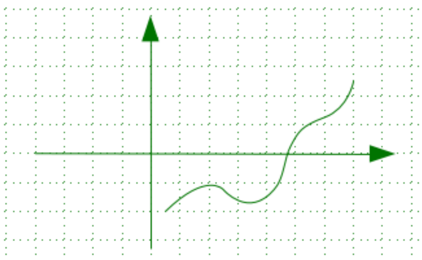
3.4 1 Nullstelle, 2 Extremstellen, 3 Wendepunkte *grad* ≥ 5



zu 3.1

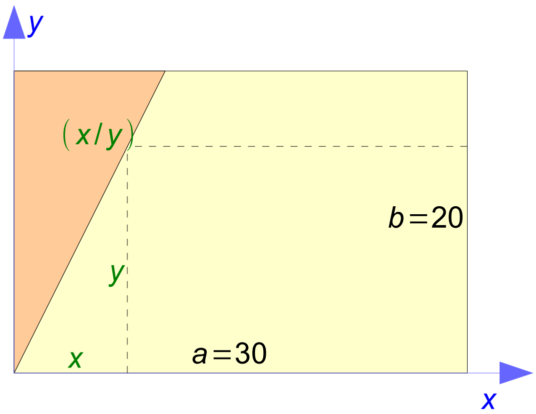


zu 3.2



zu 3.4

4 Von einem DINA-4-Blatt (näherungsweise mit den Seitenlängen $a=30$ und $b=20$) soll ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten der Länge 20 und 10 abgeschnitten werden, sodass aus dem Rest noch ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt ausgeschnitten werden kann.
Die Schnitte sollen so wie in der Skizze oben ausgeführt werden. Die gestrichelten Linien sind aber nicht unbedingt an der richtigen Stelle.



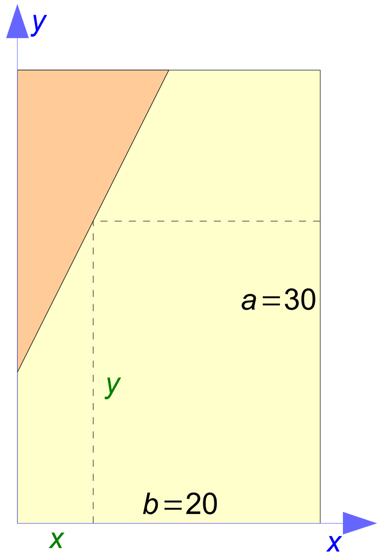
4.1 Berechne algebraisch den maximalen Flächeninhalt des gestrichelten Rechtecks.
Hilfe: Im Koordinatensystem hat die schräge Begrenzungskante des Dreiecks die Gleichung $y=2\cdot x$.

Zum Berührpunkt des Rechtecks mit der schrägen Dreiecksseite gehören die Koordinaten x und y.
Die Fläche des Rechtecks berechnet sich aus $A(x,y)=(a-x)\cdot y \rightarrow A(x)=(a-x)\cdot 2x=2ax-2x^2$

Ableiten der Zielfunktion und Nullsetzen: $A'(x)=2a-4x\overset{!}{=}0 \rightarrow 4x=2a \rightarrow x=\frac{1}{2}\cdot a=\frac{1}{2}\cdot 30=15$

Wegen $A''(x)=-4<0$ *läge tatsächlich ein Hochpunkt vor, da y aber nicht größer als 20 sein kann, muss x kleiner oder gleich 10 sein. Es liegt also ein Randmaximum vor.*
Für x=0 ist A=0. Für x=10 und y=20 gilt $A=2\cdot 30\cdot 10-2\cdot 10^2=600-200=400$.
Das größte Rechteck ist also ein Quadrat mit der Seitenlänge 20.

4.2 Könnte man den Flächeninhalt des Rechtecks größer erhalten, wenn man die Schnitte so wie in der unteren Skizze ausführt?
Zeige (mit Begründung), dass für die schräge Begrenzungskante des Dreiecks jetzt die Gleichung $y=2x+10$ gilt.
Bestimme mit Begründung und Dokumentation (also auch unter Verwendung beliebiger Taschenrechnerfunktionen) für die untere Skizze den maximalen Flächeninhalt des gestrichelten Rechtecks.



Die lange Kathete des Dreiecks hat die Länge 20. Damit verbleiben am unteren senkrechten Rand noch 10 Längeneinheiten. Der y-Achsenabschnitt beträgt also 10.
Die Steigung der schrägen Dreieckskante bleibt gleich 2.
Damit ergibt sich die Geradengleichung $y=2\cdot x+10$.

Vorgehen wie bei 4.1:

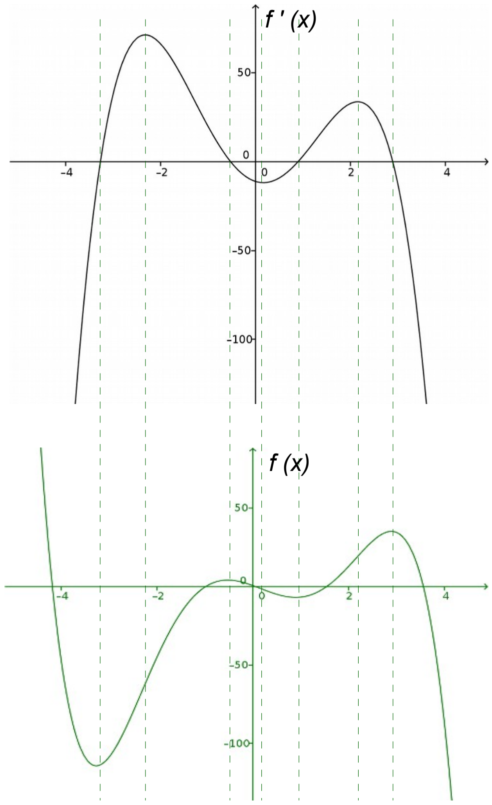
$A(x,y)=(b-x)\cdot y \rightarrow A(x)=(b-x)\cdot(2x+10)=2bx+10b-2x^2-10x$

$A'(x)=2b-4x-10\overset{!}{=}0 \rightarrow 4x=2b-10 \rightarrow x=\frac{2b-10}{4}=\frac{b-5}{2}=\frac{20-5}{2}=\frac{15}{2}=7{,}5$

$A''(x)=-4<0 \rightarrow$ Hochpunkt *Da x=7,5 im Definitionsbereich für x liegt, ergibt sich hier der maximale Flächeninhalt zu* $A(7{,}5)=(20-7{,}5)\cdot(15+10)=12{,}5\cdot 25=312{,}5$.
Dieser Wert ist kleiner als bei 4.1. Folglich sollte man so schneiden wie bei 4.1.

Alternativ ließe sich mit dem Taschenrechner die Lösung auch näherungsweise finden (Graph zeichnen lassen und Maximum ermitteln lassen oder in Listen die Produkte der Seitenlängen (b-x) und (2x+10) für verschiedene x berechnen lassen und den maximalen Wert heraussuchen.

5 Der Ableitungsgraph von $f'(x)$ ist gegeben.
Zeichne einen möglichen Graph für $f(x)$.



Formeln: $x^2+p\cdot x+q=0 \rightarrow x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$

Achsensymmetrie: $f(x)=f(-x)$; $f(x)=-f(-x+2u)$

Punktsymmetrie: $f(x)=-f(-x)$; $f(x)=-f(-x+2u)+2v$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!