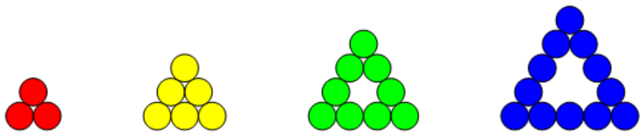
2013-12-16 Klassenarbeit 2 Klasse 10e Mathematik

Lösung

Bei den Aufgaben 1 und 2 kannst Du frei wählen, ob Du die Werte für n bei den Folgen a(n) bei 0 oder 1 beginnen lassen willst. Gib jeweils an, welches bei Dir das kleinste n ist.

---

1 Nebenstehend sind die ersten 4 Anordnungen von Punkten abgebildet, bei denen die Anzahl der Punkte nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit zunimmt.



Erstelle eine <u>explizite</u> und eine <u>rekursive</u> Formel für die Folge, die beschreibt, wie viele Punkte in jeder Anordnung sind.

Die Anzahl a(n) der Punkte in der n-ten Anordnung:

n	1	2	3	4
a(n)	3	6	9	12

explizite Darstellung: $a(n)=3\cdot n$

rekursive Darstellung: $a(n)=a(n-1)+3 \;\; ; \;\; a(1)=3$

---

2 Erstelle eine <u>explizite</u> und eine <u>rekursive</u> Formel für folgende Folge:
$2\;;\;-4\;;\;8\;;\;-16\;;\;32\;;\ldots$

Die Folge kann auch so geschrieben werden: $2^1\;;\;-2^2\;;\;2^3\;;\;-2^4\;;\;2^5\;;\;\ldots$

Daraus ergeben sich die Lösungen:

explizite Darstellung: $a(n)=2^n\cdot(-1)^{n+1}$

rekursive Darstellung: $a(n)=-2\cdot a(n-1) \;\; ; \;\; a(1)=2$

---

3 Gegeben sind die Folgen $a(n)=3n+1 \;\; ; \;\; b(n)=\frac{2}{n}+3 \;\; ; \;\; c(n)=\frac{n-5}{50+2n} \;\; ; \;\; d(n)=\frac{7n}{n^2+4n}$

Gib für jede Folge an, ob sie einen Grenzwert für $n\rightarrow\infty$ besitzt.
Falls der Grenzwert existiert, gib diesen Grenzwert an.

$a(n)$ *hat keinen Grenzwert, da für wachsendes n der Term über alle Grenzen wächst.*

$$\lim_{n\to\infty} b(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+3\right)=0+3=3$$

$$\lim_{n\to\infty} c(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-5}{50+2n}\right)\overset{n}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{5}{n}}{\frac{50}{n}+2}\right)=\frac{1-0}{0+2}=\frac{1}{2}=0{,}5$$

$$\lim_{n\to\infty} d(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n}{n^2+4n}\right)\overset{n}{=}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n+4}\right)=0$$ *, da der Nenner über alle Grenzen wächst.*

4 In einem Gewächshaus wird die Erde an jedem Morgen mit 5 Liter Wasser pro Quadratmeter bewässert. Im Laufe des Tages verdunsten 40% des Wassers, das sich insgesamt im Boden befindet.

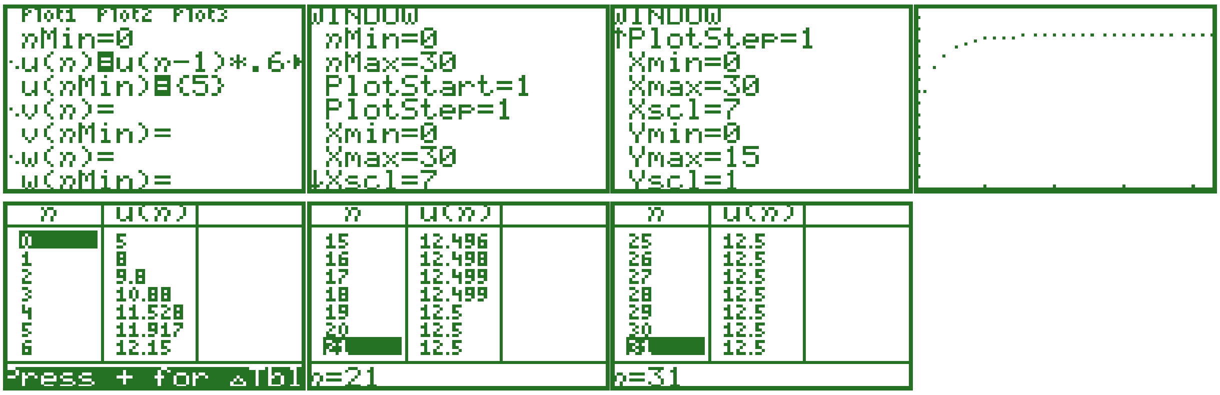
4.1 Stelle eine rekursive Formel auf, die beschreibt, wie viel Wasser sich direkt nach dem Gießen auf $1\,m^2$ Fläche im Boden befindet.

Wenn 40% verdunsten, bleiben noch 60% übrig.
Zu Beginn kann noch nichts verdunsten. Deshalb befinden sich zur Zeit 0 5 Liter Wasser im Boden.
W(t) gibt die Wassermenge zur Zeit t (in Tagen) an.

$W(t)=W(t-1)\cdot 0{,}6+5 \;\;;\;\; W(0)=5$

4.2 Untersuche (Dokumentation!), wie sich der Wasserstand über einen längeren Zeitraum entwickelt und gib den Wasserstand nach 1 Monat an.

Taschenrechner:



Es liegt ein begrenztes Wachstum vor. Der Wasserstand ändert sich nach einiger Zeit nicht mehr merkbar. Es sind dann nach dem Gießen 12,5 Liter Wasser pro Quadratmeter im Boden.

Mit Taschenrechnergenauigkeit (3 Nachkommastellen) ergibt sich bereits nach 19 Tagen die Menge 12,5 Liter. Also sind auch nach einem Monat 12,5 Liter Wasser vorhanden.

Den Grenzwert kann man auch berechnen, indem man $W(t)=W(t-1)=W$ *setzt:*

$$W=W\cdot 0{,}6+5 \;\rightarrow\; W-0{,}6\cdot W=5 \;\rightarrow\; 0{,}4\cdot W=5 \;\rightarrow\; W=\frac{5}{0{,}4}=\frac{50}{4}=12{,}5$$

5 Ein Auto lässt sich an eine rote Ampel mit der Geschwindigkeit $v=1\frac{m}{s}$ rollen und fährt nach der Ampel, die gerade auf Grün geschaltet hat, noch 1 Sekunde mit dieser Geschwindigkeit. Danach beschleunigt das Auto, muss dann aber vor einer Bauampel, die von der ersten Ampel den Abstand 500 m hat, wieder abbremsen.

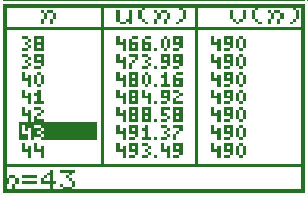
Näherungsweise lässt sich die zurückgelegte Strecke zwischen den Ampeln durch logistisches Wachstum mit dem Wachstumsfaktor $q=0,0005$ beschreiben, d. h. der Zuwachs ist proportional zur zurückgelegten Strecke und proportional zu der Strecke, die noch zurückgelegt werden muss.

5.1 Stelle eine rekursive Formel auf, die angibt, wie groß die zur Zeit t zurückgelegte Strecke s ist.

$s(t)=s(t-1)+0{,}0005\cdot s(t-1)\cdot(500-s(t-1))$; $s(1)=1$

5.2 Gib an, wie viele Sekunden nach Passieren der 1. Ampel das Auto noch etwa 10 m von der 2. Ampel entfernt ist. Gib nachvollziehbar Deinen Lösungsweg an, also die Rechnung oder das Vorgehen beim Lösen mit dem Taschenrechner.

Taschenrechner:



n	u(n)	v(n)
38	466.09	490
39	473.99	490
40	480.16	490
41	484.92	490
42	488.58	490
43	491.37	490
44	493.49	490

n=43

Zwischen der 42. und 43. Sekunde ist der Wagen noch 10 m von der Ampel entfernt.

5.3 Bestimme rechnerisch oder mit dem Taschenrechner (Dokumentation!), wie viel Meter von der 1. Ampel entfernt das Auto die größte Geschwindigkeit besitzt und gib die Größe dieser Geschwindigkeit an.
Hinweis (weil dieses ja keine Physikarbeit ist): In kleinen Zeiträumen (und 1s ist ein kleiner Zeitraum) kann man davon ausgehen, dass sich die Geschwindigkeit v nicht stark ändert und dass deshalb gilt $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Der Graph zeigt bei etwa 30 Sekunden den stärksten Anstieg. Dort muss also auch die Stelle sein, an der der Wagen die längste Strecke pro Sekunde zurücklegt, also die größte Geschwindigkeit hat. Die Tabelle zeigt, dass zwischen der 28. und 29. Sekunde die längste Strecke zurückgelegt wird:
27. bis 28. Sekunde: 243,62-213,06=30,56
28. bis 29. Sekunde: 274,85-243,62=31,23
29. bis 30. Sekunde: 305,80-274,85=30,95
Die maximale Geschwindigkeit beträgt also etwas mehr als 31 m/s.
Der Wagen ist dann zwischen 244 m und 274 m von der 1. Ampel entfernt, also rund 260 m.

6 Bestimme rechnerisch (algebraisch, also ohne Taschenrechner) für die Funktion f mit der Gleichung $f(x)=4-2\cdot x^2$ die Steigung an der Stelle $x_0=7$.

$$f'(7)=\lim_{x\to 7}\frac{(4-2\cdot x^2)-(4-2\cdot 7^2)}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{-2\cdot x^2+2\cdot 7^2}{x-7}=\lim_{x\to 7}\left(-2\cdot\frac{x^2-7^2}{x-7}\right)=\lim_{x\to 7}\left(-2\cdot\frac{(x-7)\cdot(x+7)}{x-7}\right)=$$
$$\lim_{x\to 7}(-2\cdot(x+7))=-2\cdot(7+7)=-28$$

oder einfacher:

$$f'(7)=\lim_{h\to 0}\frac{(4-2\cdot(7+h)^2)-(4-2\cdot 7^2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4-2\cdot(49+14\cdot h+h^2)-4+2\cdot 49}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-28\cdot h-2\cdot h^2}{h}=$$
$$\lim_{h\to 0}(-28-2\cdot h)=-28$$

Formeln

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$

$x^2+p\cdot x+q=0 \rightarrow x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!

lineares Wachstum: $u(n)=u(n-1)+d$

exponentielles Wachstum: $u(n)=u(n-1)\cdot q$

überlagertes lineares und exponentielles Wachstum: $u(n)=u(n-1)\cdot q+d$

begrenztes Wachstum: $u(n)=u(n-1)+q\cdot(G-u(n-1))$

logistisches Wachstum: $u(n)=u(n-1)+q\cdot u(n-1)\cdot(G-u(n-1))$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$