Lösung

1 Berechne jeweils den Wert für x.
Benutze dazu nicht den Taschenrechner. Im Ergebnis soll keine Dezimalzahldarstellung benutzt werden; nur ganze Zahlen, Brüche und Wurzeln sind erlaubt.

a) $\log_x 49 = -2 \rightarrow x^{-2} = 49 \rightarrow \frac{1}{x^2} = 49 \rightarrow x^2 = \frac{1}{49} = \frac{1}{7^2} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 \rightarrow x = \frac{1}{7}$

b) $\log_{\sqrt{2}} x = 4 \rightarrow x = \sqrt{2}^4 = \left(\sqrt{2}^2\right)^2 = 2^2 = 4$

c) $\log_3 \sqrt[7]{9} = x \rightarrow 3^x = \sqrt[7]{9} = \sqrt[7]{3^2} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{7}} = 3^{\frac{2}{7}} \rightarrow x = \frac{2}{7}$

---

2 Berechne ohne Benutzung des Taschenrechners $\log_a \frac{1}{\sqrt[7]{a^5}}$.

$\log_a \frac{1}{\sqrt[7]{a^5}} = \log_a \frac{1}{a^{\frac{5}{7}}} = \log_a a^{-\frac{5}{7}} = -\frac{5}{7}$

---

3 Löse folgende Gleichungen. Benutze den Taschenrechner nur, um den Wert des Ergebnisses als Dezimalzahl angeben zu können.

a) $\log_4 x + \log_4 7 = \log_4 11 \rightarrow \log_4(x \cdot 7) = \log_4 11 \rightarrow x \cdot 7 = 11 \rightarrow x = \frac{11}{7} \approx 1{,}57$

b) $6^x = 3 \cdot 9^{x+1} \rightarrow 6^x = 3 \cdot 9 \cdot 9^x \rightarrow \frac{6^x}{9^x} = 27 \rightarrow \left(\frac{6}{9}\right)^x = 27 \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 27 \rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} 27 \approx -8{,}13$

oder $6^x = 3 \cdot 9^{x+1} \rightarrow lg\, 6^x = lg\left(3 \cdot 9^{x+1}\right) = lg\, 3 + lg\, 9^{x+1} \rightarrow x \cdot lg\, 6 = lg\, 3 + (x+1) \cdot lg\, 9 = lg\, 3 + x \cdot lg\, 9 + lg\, 9 \rightarrow$

$x \cdot lg\, 6 - x \cdot lg\, 9 = lg\, 3 + lg\, 9 \rightarrow x \cdot (lg\, 6 - lg\, 9) = lg\, 3 + lg\, 9 \rightarrow x = \frac{lg\, 3 + lg\, 9}{lg\, 6 - lg\, 9} = \frac{lg(3 \cdot 9)}{lg\left(\frac{6}{9}\right)} = \frac{lg\, 27}{lg\left(\frac{2}{3}\right)} = \log_{\frac{2}{3}} 27 \approx -8{,}13$

---

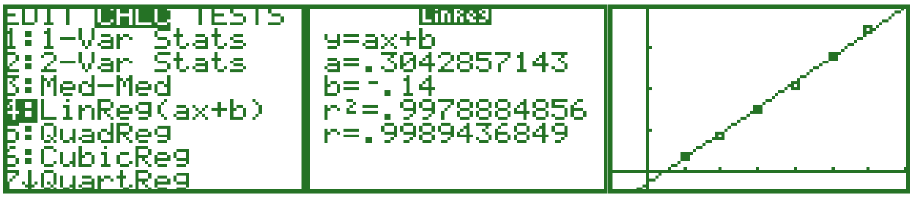
4 Bei einer Messung hat man folgende Messwerte gewonnen:

x	1	2	3	4	5	6
y	0,20	0,45	0,75	1,05	1,40	1,70

Gib mit Begründung an, durch welchen Funktionstyp (lineare Funktion, Potenzfunktion oder Exponentialfunktion) die Messpunkte am besten angenähert werden können.
Führe zur Beantwortung der Frage Regressionen mit dem Taschenrechner durch und protokolliere die jeweiligen Ergebnisse.

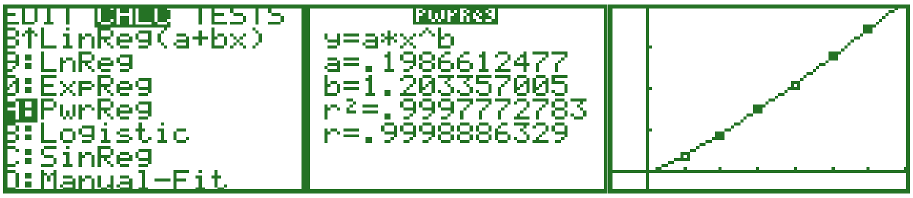
Eingabe der Daten:

*Lineare Regression (LinReg(a*x+b))* $y = 0{,}30 \cdot x - 0{,}14$



Exponentielle Regression (ExpReg) $y = 0{,}18 \cdot 1{,}51^{x}$

Potentielle Regression (PwrReg) $y = 0{,}20 \cdot x^{1{,}20}$



Die Exponentialfunktion scheidet als Näherungskurve aus, da der Graph zu stark gekrümmt ist und den Punktverlauf ungenügend widerspiegelt.

Die lineare Funktion und die Potenzfunktion sind dagegen gute Näherungsfunktionen. Allerdings erkennt man bei der Ausgleichsgerade, dass die Punkte möglicherweise in einer Linkskurve angeordnet sind (die äußeren Punkte liegen oberhalb, die mittleren Punkte unterhalb der Gerade). Die Potenzfunktion folgt eher dem Punktverlauf.
Für eine eindeutige Entscheidung muss aber der Kontext des Versuchs beachtet werden (was wird gemessen, wie werden sich die Versuchswerte für größere oder kleinere x-Werte entwickeln?).

---

5 4 % eines Sees sind durch Algenbewuchs befallen. Nach 2 Tagen ist der gesamte See auf Grund des exponentiellen Wachstums betroffen.

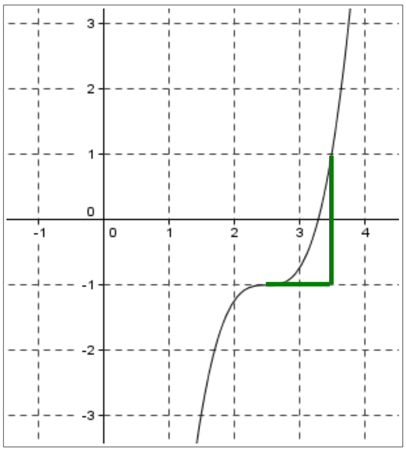
Gib mit Begründung an, um welchen Faktor sich die Algen an einem Tag vermehren.

An 1 Tag vermehren sich die Algen um das k-fache, an 2 Tagen um das k²-fache.

Nach 2 Tagen sind 100 % befallen, d. h. $4\,\% \cdot k^2 = 100\,\% \;\rightarrow\; k^2 = \frac{100}{4} = 25 \;\rightarrow\; k = 5.$

Die Algen wachsen also jeden Tag auf das 5-fache ihrer Menge an.

6 Gib die Funktionsgleichung für den nebenstehenden Graphen an. Es handelt sich um eine Potenzfunktion 3. Grades.



Der Graph ist gegenüber dem Graphen von $y=x^3$ um 2,5 nach rechts und um -1 nach unten verschoben. Außerdem ist er um den Faktor 2 gestreckt.

Daraus folgt: $y=2\cdot(x-2{,}5)^3-1$

---

7 Für Schilddrüsenuntersuchungen wird das radioaktive Technetium ^{99m}Tc (ein metastabiles, aus ^{99}Mo durch Neutronenbeschuss künstlich erzeugtes Isotop) benutzt, das eine Halbwertzeit von 6 Stunden besitzt.

a) Erstelle eine Funktionsgleichung, mit der die Masse y des Technetiums zur Zeit x berechnet werden kann.

Radioaktiver Zerfall lässt sich durch eine Exponentialfunktion der Form $y=a\cdot b^{\frac{x}{c}}$ beschreiben, wobei a (hier 100 %) die Ausgangsmenge und y die Menge zur Zeit x (hier in Stunden) angibt.

b gibt an, auf welchen Bruchteil die Substanz nach einer Zeiteinheit zerfällt (hier $b=\frac{1}{2}$ für die Halbwertzeit von 6 Stunden). Der Wert von c muss so gewählt werden, dass der Exponent für die Halbwertzeit 6 Stunden den Wert 1 annimmt. Also gilt $c=6$.

Daraus folgt: $y=100\%\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{6}}$.

Zeige, dass die gefundene Funktionsgleichung mit der Gleichung $y=100\%\cdot 0{,}89^x$ (in guter Näherung) übereinstimmt.

$$y=100\%\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{6}}=100\%\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}}\right)^x=100\%\cdot\sqrt[6]{\frac{1}{2}}^{\,x}=100\%\cdot 0{,}890898718...^x\approx 100\%\cdot 0{,}89^x$$

Falls du die Funktionsgleichung nicht bestimmen konntest, rechne den Teil b) mit der gegebenen Gleichung.

b) Berechne, wie viele Stunden es dauert, bis von dem ursprünglich vorhandenen Technetium noch 3 % vorhanden sind.

$$3\%=100\%\cdot 0{,}89^x \rightarrow \frac{3}{100}=0{,}89^x \rightarrow x=\log_{0{,}89}0{,}03\approx 30$$

Nach 30 Stunden sind also noch etwa 3 % des Technetiums vorhanden.

---

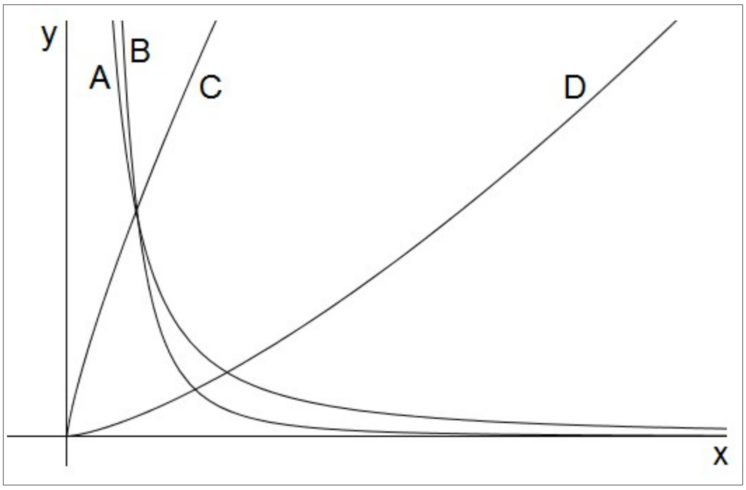
8 Ordne den Graphen eine der gegebenen Funktionsgleichungen eindeutig zu.
Achtung: Nicht alle Graphen und alle Gleichungen müssen einen Partner haben.

a) $f_1(x)=2{,}5\cdot x^{-1{,}5}$ A

$f_2(x)=0{,}3\cdot x^{1{,}4}$ D

$f_3(x)=3{,}2\cdot x^{0{,}8}$ C

$f_4(x)=2{,}3\cdot x^{-2{,}6}$ B



b) $g_1(x)=3\cdot\sqrt{31}^{\,x}$ G

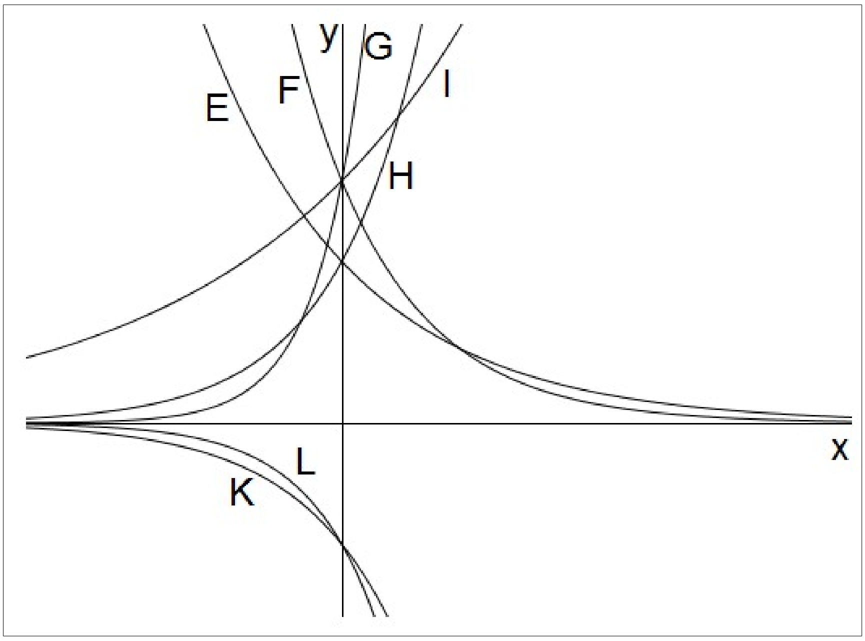
$g_2(x)=2\cdot 1{,}7^{-x}$ E

$g_3(x)=-1{,}5\cdot 3{,}2^x$ L

$g_4(x)=2\cdot 2{,}5^x$ H

$g_5(x)=3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x$ F

$g_6(x)=-1{,}5\cdot 2{,}3^x$ K



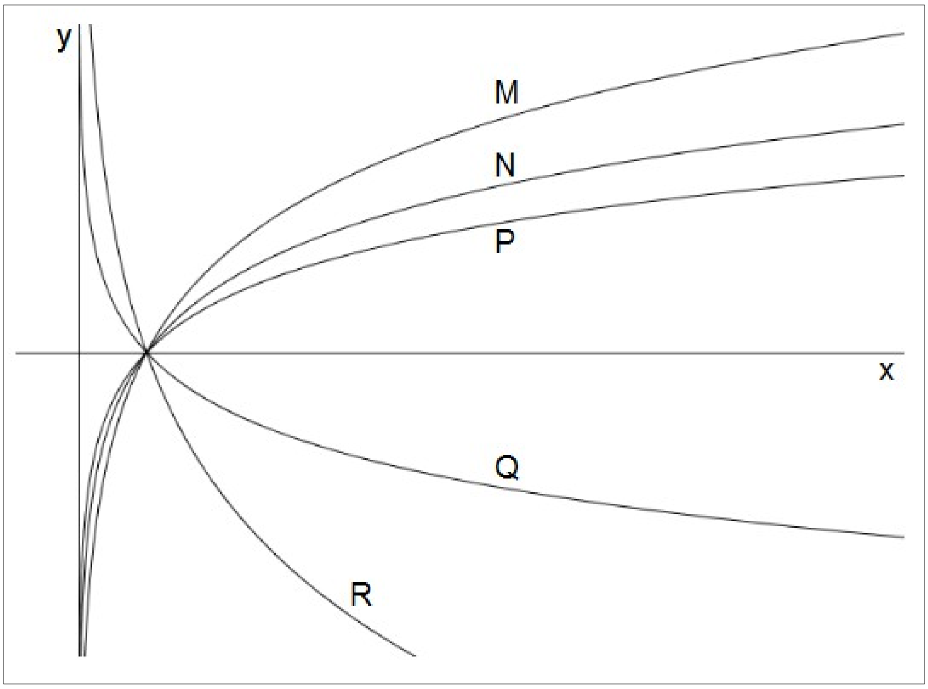
c) $h_1(x)=\log_{2,6} x$ P

$h_2(x)=\log_{1,7} x$ M

$h_3(x)=\log_{0,4} x$ Q

$h_4(x)=\log_{0,7} x$ R

$h_5(x)=\log_{2,1} x$ N



Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!