2011-12-13 Klausur 2 Kurs 11ma3g Mathematik

Lösung

Wenn in den Aufgaben „ohne Taschenrechner“ steht, sind Grundrechenarten von diesem Verbot ausgenommen.

---

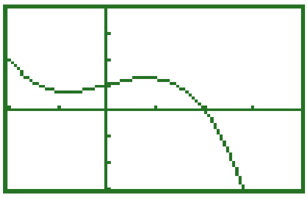
1 Gegeben ist die Funktionsgleichung $f(x)=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{4}\cdot x^3+1$.

a) Berechnen Sie ohne Taschenrechner das Integral $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$.

$$\int_{-1}^{4}\left(\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{4}\cdot x^3+1\right)dx=\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{16}+x\right]_{-1}^{4}=(4-16+4)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-1\right)=-8-\frac{4-1-16}{16}=-\frac{128}{16}+\frac{13}{16}=-\frac{115}{16}$$

b) Berechnen Sie ohne Taschenrechner den Flächeninhalt der Fläche, die im Bereich von $x=-1$ bis $x=4$ vom Graph und der x-Achse eingeschlossen wird.
Eine (übrigens ganzzahlige) Nullstelle dürfen Sie mit Hilfe des Taschenrechners ermitteln.

Der Graph der Funktion deutet darauf hin, dass bei x=2 eine Nullstelle vorliegen könnte. Die Überprüfung ergibt: $f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot 2^3+1=1-2+1=0$



Der Graph verläuft im Intervall [-1,2] oberhalb und im Intervall [2,4] unterhalb der x-Achse. Die Flächeninhaltsberechnung muss also für 2 Teilflächen durchgeführt werden:

$$A_{[-1,2]}=\left|\int_{-1}^{2}(f(x))\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{16}+x\right]_{-1}^{2}\right|\overset{\text{siehe oben}}{=}\left|(1-1+2)+\frac{13}{16}\right|=\left|\frac{32}{16}+\frac{13}{16}\right|=\frac{45}{16}=2{,}8125$$

$$A_{[2,4]}=\left|\int_{2}^{4}(f(x))\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{16}+x\right]_{2}^{4}\right|\overset{\text{siehe oben}}{=}\left|-\frac{128}{16}-\frac{32}{16}\right|=\left|-\frac{160}{16}\right|=\frac{160}{16}=10$$

Für den gesamten Flächeninhalt ergibt sich $A_{gesamt}=A_{[-1,2]}+A_{[2,4]}=\frac{45}{16}+\frac{160}{16}=\frac{205}{16}=12{,}8125$

---

2 Die Integralfunktion $I(x)=\int_{2}^{x}(-2\cdot t+1)\,dt$ besitzt den Funktionswert $I(x)=-28$.

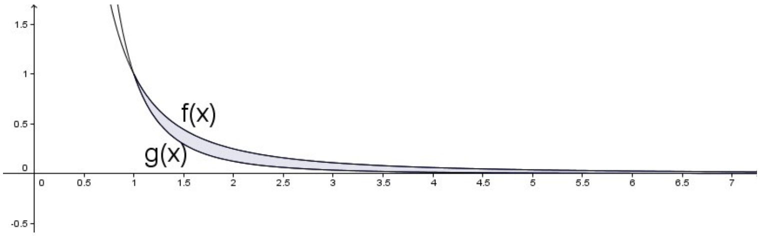
Berechnen Sie ohne Taschenrechner den Wert von x.

$$\int_{2}^{x}(-2\cdot t+1)\,dt=-28 \rightarrow \left[-t^2+t\right]_{2}^{x}=\left(-x^2+x\right)-(-4+2)=-x^2+x+2\overset{!}{=}-28 \rightarrow$$

$$x^2-x-30=0 \overset{\text{p-q-Formel}}{\rightarrow} x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+30}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{121}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{11}{2} \rightarrow x_1=\frac{12}{2}=6\ ;\ x_2=-\frac{10}{2}=-5$$

Wenn die obere Grenze des Integrals größer als die untere Grenze sein soll, erhält man als Lösung x=6.

3 Die Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x)=\frac{1}{x^2}$ und $g(x)=\frac{1}{x^3}$ im Bereich zwischen $x=1$ und $x=\infty$ eingeschlossen wird, ist nach rechts hin unbegrenzt, hat aber dennoch einen endlichen Flächeninhalt. Berechnen Sie ohne Taschenrechner dieses Flächeninhalt.

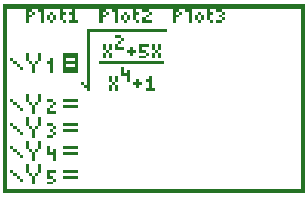


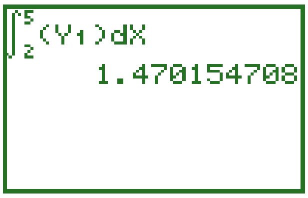
Für den Flächeninhalt zwischen den beiden Graphen gilt:

$$A=\int_1^\infty (f(x)-g(x))\,dx=\int_1^\infty \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{2\cdot x^2}\right]_1^\infty=(0+0)-\left(-1+\frac{1}{2}\right)=0-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

---

4 Berechnen Sie mit dem Taschenrechner folgendes Integral: $\int_2^5 \sqrt{\frac{x^2+5x}{x^4+1}}\,dx=$





Der Wert des Integrals beträgt also etwa 1,47.

---

5 Die Graphen der Funktionen $f(x)=x^2-2$ und $g(x)=2x+1$ schneiden sich und schließen ein Flächenstück vollkommen ein.

a) Zeigen Sie, dass sich die Graphen bei $x=-1$ und bei $x=3$ schneiden.

Zu zeigen ist, dass $f(-1)=g(-1)$ und $f(3)=g(3)$.

$f(-1)=1-2=-1$; $g(-1)=-2+1=-1$; $f(3)=9-2=7$; $g(3)=6+1=7$ *q.e.d.*

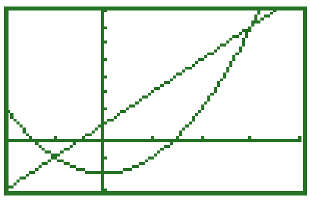
b) Berechnen Sie ohne Taschenrechner den Flächeninhalt dieses Flächenstücks.

Eine Parabel und eine Gerade haben höchstens 2 Schnittpunkte. Die zu berechnende Fläche besteht also aus einem Teilstück.

Da die Parabel nach oben geöffnet ist (Faktor +1 vor x^2), liegt die Gerade im betrachteten Bereich oberhalb der Parabel. Es wird deshalb zur Berechnung die Differenz g(x)-f(x) benutzt.

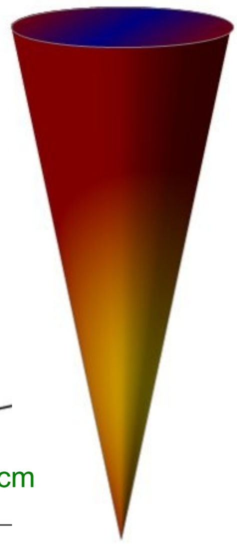
$$\int_{-1}^3 (g(x)-f(x))\,dx=\int_{-1}^3 \left((2x+1)-(x^2-2)\right)dx=\int_{-1}^3 (-x^2+2x+3)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^3=$$

$$(-9+9+9)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=9-\frac{1}{3}+2=11-\frac{1}{3}=\frac{32}{3}=10,\overline{6}$$



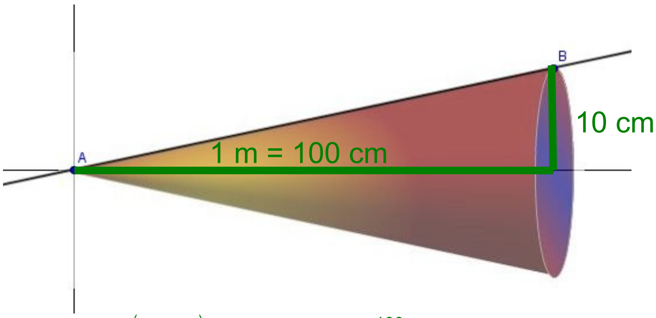
Der gesuchte Flächeninhalt beträgt also etwa 10,7 Flächeneinheiten.

6 Ein Geschenkeversand kreiert eine Zuckertüte für den Schulbeginn. Der Radius der kreisförmigen Grundfläche beträgt 10 cm und die Tüte hat die Länge 1 m.
Gesucht ist das Volumen der Tüte. Zur Berechnung legt man die Tüte am besten auf die Seite und wählt den Koordinatenursprung in der Tütenspitze. Mit der Formel $V=\pi\cdot\int_a^b (f(x))^2 dx$ bzw. $V=\pi\cdot\int_a^b y^2 dx$ kann man dann das Volumen berechnen, wenn man vorher noch die Funktionsgleichung der Seitenkante der Tüte berechnet hat.



Berechnen Sie das Volumen der Tüte ohne Taschenrechner.

f(x) hat als Graph eine Ursprungsgerade durch A und B mit der Steigung $\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$.



$$f(x)=\frac{1}{10}\cdot x \;\rightarrow\; V=\pi\cdot\int_0^{100}\left(\frac{1}{10}\cdot x\right)^2 dx=\pi\cdot\int_0^{100}\left(\frac{x^2}{100}\right)dx=\pi\cdot\left[\frac{x^3}{300}\right]_0^{100}=\pi\cdot\left(\frac{1000000}{300}-0\right)\approx 10472$$

Die Tüte fasst also etwas weniger als 10500 cm³, das sind 10,5 Liter.

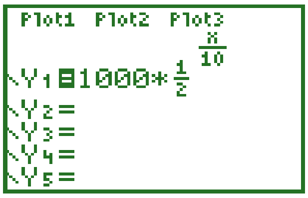
---

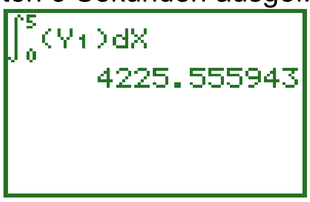
7 Füllt man einen Wasserfilter mit Wasser, so fließt das Wasser um so schneller aus, je höher das Wasser im Behälter steht. Man hat im Experiment ermittelt, dass bei einem vollgefüllten Filter die ausfließende Wassermenge pro Sekunde durch folgende Formel beschrieben werden kann:

$w(t)=1000\,cm^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10\,s}}$ w(t): Wassermenge pro Sekunde ; t: Zeit

a) Berechnen Sie mit dem GTR, wieviel Wasser in den ersten 5 Sekunden ausgeflossen ist.

$$\int_{0s}^{5s} w(t)\,dt=\int_{0s}^{5s}\left(1000\,cm^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10s}}\right)dt \xrightarrow{GTR}$$





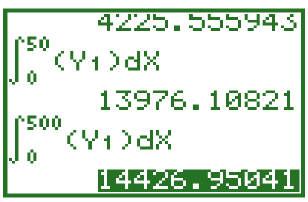
Es sind etwa 4226 cm³ ausgeflossen.

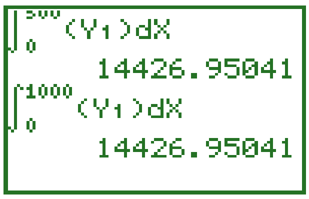
b) Berechnen Sie mit dem GTR das Volumen des Wasserfilters.

Das Volumen ist gleich der gesamten ausgeflossenen Wassermenge. Eigentlich ist das Wasser erst nach unendlich langer Zeit vollständig ausgeflossen. Näherungsweise kann man aber den Wert berechnen, wenn man sehr große Zeitspannen betrachtet:

Nach 50 s sind knapp 14000 cm³ geflossen.

Dieser Wert wird noch größer, wenn man mit der Zeitspanne 500 s rechnet. Dann sind es 14427 cm³.

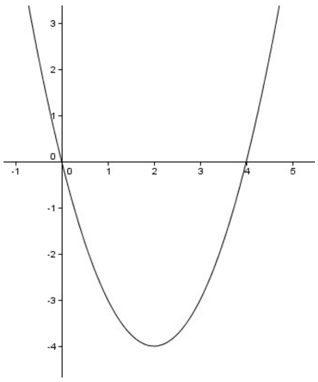


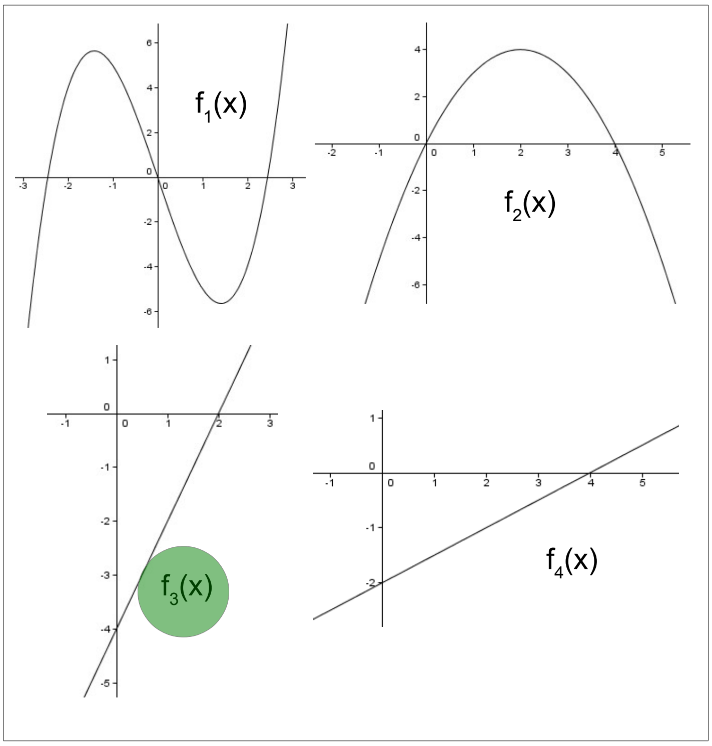


Ein Versuch mit der doppelten Zeit (1000 s) ergibt denselben Wert.

Man darf also wohl annehmen, dass das Volumen des Wasserfilters 14427 cm³ beträgt.

8 Gegeben ist der Graph einer Stammfunktion $F(x)$:





Wählen Sie (mit Begründung!) aus den nebenstehenden Graphen den Graphen der Funktion $f_i(x)$ aus, die zu dieser Stammfunktion gehört:

Wegen des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung gilt $F'(x)=f(x)$.

Die Parabel von $F(x)$ hat eine waagrechte Tangente bei $x=2$. Dort muss also der Graph der Funktion $f(x)$ eine Nullstelle besitzen. Die einzige Funktion mit dieser Eigenschaft ist $f_3(x)$. Also ist der untere linke Graph gesucht.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!