08.02.2002 Klassenarbeit 3 Klasse 10fa Mathematik

Lösungsblatt

1 Fasse zusammen und schreibe mit so wenig Logarithmen wie möglich:

$$3\cdot \lg\frac{a}{b} - \lg a + \lg b =$$

Lösung: $\lg\frac{a^3\cdot b}{b^3\cdot a} = \lg\frac{a^2}{b^2}$

---

2 Schreibe in einen Term mit mehreren Logarithmen so um, dass hinter jedem Logarithmus (als Numerus) entweder eine ganze Zahl oder ein einzelner Buchstabe steht:

$$\lg\frac{\sqrt[5]{a^2\cdot\frac{4}{5x}}}{3} =$$

Lösung: $\lg\sqrt[5]{a^2\cdot\frac{4}{5\cdot x}} - \lg 3 = \frac{1}{5}\cdot\lg\left(a^2\cdot\frac{4}{5\cdot x}\right) - \lg 3 = \frac{2}{5}\cdot\lg a + \frac{1}{5}\cdot\lg 4 - \frac{1}{5}\cdot\lg 5 - \frac{1}{5}\cdot\lg x - \lg 3$

---

3 Berechne alle Lösungen folgender Gleichungen:

a) $\lg(8-2x) = \lg(x+5)$

Lösung: $8-2x = x+5 \quad\Rightarrow\quad 3 = 3x \quad\Rightarrow\quad 1 = x$

b) $3^{2x+1} - 4\cdot 3^x + 1 = 0$

Lösung: $3^{2x}\cdot 3^1 - 4\cdot 3^x + 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad \left(3^x\right)^2\cdot 3 - 4\cdot 3^x + 1 = 0$ *Substitution:* $3^x = z$

$$3\cdot z^2 - 4\cdot z + 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad z^2 - \frac{4}{3}\cdot z + \frac{1}{3} = 0 \quad\Rightarrow\quad z_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{3}{9}} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}$$

$$z_1 = \frac{3}{3} = 1 \quad\Rightarrow\quad 3^{x_1} = 1 \quad\Rightarrow\quad x_1 = \log_3 1 = 0$$

$$z_2 = \frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad 3^{x_2} = \frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad x_2 = \log_3\frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$$

---

4 Vor einigen Tagen stand in der Zeitung, ein Extrem-Sportler wolle aus 40 km Höhe mit einem Fallschirm zur Erde springen. Der Luftdruck nimmt mit jedem Höhen-Kilometer, um den man sich von der Erde entfernt, um 13% ab. In der Höhe 0 km, also auf Meereshöhe, beträgt der Luftdruck etwa 1000 hPa.
Berechne mit Hilfe dieser Angaben, wie hoch der Luftdruck an der Absprungstelle des Fallschirmspringers ist.
Lösung:
Es liegt exponentielle Abnahme des Luftdrucks vor.

In der Gleichung $y = c \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$ *ist x die Höhe in km (also 40), c der Luftdruck bei der Höhe 0km (also 1000 hPa) und p der Prozentsatz, um den der Luftdruck pro 1 Kilometer abnimmt (also 13). Gesucht ist y, der Luftdruck in der Höhe x=40 km.*

$$y = 1000hPa \cdot \left(1 - \frac{13}{100}\right)^{40} = 1000hPa \cdot 0{,}87^{40} = 3{,}8hPa$$

---

5 Claudia möchte mit ihrem jetzigen Vermögen von 350 EUR in 5 Jahren 400 EUR erlangen.
Berechne, mit welchem Prozentsatz Claudia ihr Geld dazu anlegen muss.
Lösung:
Es liegt exponentielle Zunahme des Geldbetrages vor.

In der Gleichung $y = c \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$ *ist x die Anzahl der Jahre (also 5), c das jetzige Vermögen (also 350EUR), y das Vermögen nach 5 Jahren (also 400EUR) und p der gesuchte Prozentsatz.*

$$400EUR = 350EUR \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 \quad \Rightarrow \quad \frac{400}{350} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 \Rightarrow \quad 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[5]{\frac{400}{350}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{p}{100} = \sqrt[5]{\frac{8}{7}} - 1 \quad \Rightarrow \quad p = 100 \cdot \sqrt[5]{\frac{8}{7}} - 100 \approx 2{,}7$$

---

6 Eine Firma verkauft Restposten im Internet nach folgender Regel: Zu Beginn kostet ein Computerspiel 10 EUR. Nach jeder vergangenen Minute wird das Spiel um 1% billiger.
Peter und Paul möchten beide das Spiel haben. Peter sagt, er werde genau 3 Stunden warten und dann kaufen. Paul meint, er werde so lange warten, bis der Preis auf 1 EUR gefallen ist und dann kaufen.
Finde durch Rechnung heraus, wer von beiden das Spiel schließlich bekommen wird (wenn wir mal von weiteren Bewerbern absehen).
Lösung:
Es liegt exponentielle Abnahme des Preises nach der Gleichung

$$y = 10EUR \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)^x = 10EUR \cdot 0{,}99^x$$

vor. Dabei ist y der zu zahlende Betrag und x die Anzahl der vergangenen Minuten.
3 Stunden sind 3 mal 60 Minuten, also 180 Minuten. Peter muss also soviel bezahlen:

$$y = 10EUR \cdot 0{,}99^{180} = 1{,}64EUR\,.$$

Damit ist schon klar, dass Peter das Spiel bekommt, weil er einen höheren Preis als Paul bezahlt und damit nicht so lange wie Paul gewartet hat.
Wie lange würde Paul warten müssen, um das Spiel für 1EUR zu bekommen?

$$1EUR = 10EUR \cdot 0{,}99^x \quad \Rightarrow \quad 0{,}1 = 0{,}99^x \quad \Rightarrow \quad x = \log_{0{,}99} 0{,}1 = 229{,}1$$

229,1 Minuten sind 3 Stunden und 49,1 Minuten.
