25.09.2001 Klassenarbeit 1 Klasse 10fa Mathematik

Lösungsblatt

1 Es sei $a = 3\cdot 10^{-2}$, $b = 2\cdot 10^{6}$ und $c = 4\cdot 10^{-3}$. Berechne $x = a\cdot b\cdot c$ und schreibe das Ergebnis ohne Potenz.

Lösung:

$a\cdot b\cdot c = 3\cdot 10^{-2}\cdot 2\cdot 10^{6}\cdot 4\cdot 10^{-3} = 24\cdot 10^{-2+6-3} = 24\cdot 10^{1} = 240$

---

2 Berechne den Wert von x: $\sqrt[3]{2x} = -4$.

Lösung:

$\sqrt[3]{2x} = -4 \,|()^3 \Rightarrow 2x = -64 |:2 \Rightarrow x = -32$

---

3 Schreibe $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ als einfache Wurzel.

Lösung:

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}} = \left(\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{\frac{1}{2}}}{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}} = \frac{1^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{4}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

---

4 Berechne $t^{\frac{3}{n}} : t^{-\frac{1}{n}} =$.

Lösung:

$$t^{\frac{3}{n}} : t^{-\frac{1}{n}} = t^{\frac{3}{n}-\left(-\frac{1}{n}\right)} = t^{\frac{3}{n}+\frac{1}{n}} = t^{\frac{4}{n}}$$

---

5 Kürze so weit wie möglich und schreibe nur mit positiven Hochzahlen:

a) $\frac{a^n + a^{n+1}}{a^{n+1} + a^{n+2}} =$

Lösung:

$$\frac{a^n + a^{n+1}}{a^{n+1} + a^{n+2}} = \frac{a^n\cdot(1+a)}{a^{n+1}\cdot(1+a)} = \frac{a^n}{a^{n+1}} = a^{n-(n+1)} = a^{n-n-1} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

---

b) $\frac{\left(9x^3y^{-4}\right)^{-3}}{\left(12x^2y^{-5}\right)^{-2}} =$

Lösung:

$$\frac{\left(9x^3y^{-4}\right)^{-3}}{\left(12x^2y^{-5}\right)^{-2}} = \frac{12^2\cdot x^4\cdot y^{12}}{9^3\cdot x^9\cdot y^{10}} = \frac{4^2\cdot 3^2\cdot y^2}{3^3\cdot 3^3\cdot x^5} = \frac{4^2\cdot y^2}{3^3\cdot 3\cdot x^5} = \frac{16\cdot y^2}{81\cdot x^5}$$

6 Löse die Klammern auf und schreibe als Wurzel mit möglichst kleinem Grad (zur Erinnerung: der Grad einer Wurzel ist die Zahl, die links auf dem Wurzelzeichen steht).

$\left(3\cdot\sqrt[4]{5}-5\cdot\sqrt[4]{3}\right)\cdot\left(3\cdot\sqrt[4]{5}+5\cdot\sqrt[4]{3}\right)=$

Lösung:

$\left(3\cdot\sqrt[4]{5}-5\cdot\sqrt[4]{3}\right)\cdot\left(3\cdot\sqrt[4]{5}+5\cdot\sqrt[4]{3}\right)=9\cdot\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^2-25\cdot\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^2=9\cdot5^{\frac{1}{2}}-25\cdot3^{\frac{1}{2}}=9\cdot\sqrt{5}-25\cdot\sqrt{3}$

---

7 Es sei $x>0$. Vereinfache so weit wie möglich und schreibe als Wurzel: $\dfrac{\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt{x^2}}{\sqrt[3]{x^4}}=$

Lösung:

$\dfrac{\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt{x^2}}{\sqrt[3]{x^4}}=x^{\frac{3}{5}}\cdot x^{\frac{2}{2}}:x^{\frac{4}{3}}=x^{\frac{3}{5}+\frac{1}{1}-\frac{4}{3}}=x^{\frac{9+15-20}{15}}=x^{\frac{4}{15}}=\sqrt[15]{x^4}$

---

8 Ungefähr alle 2 Jahre verdoppelt sich die Taktfrequenz (Schnelligkeit) der Computer. Nehmen wir für diese Aufgabe an, dass im Jahr 2000 die Taktrate 1000 MHz (Mega-Hertz) betrug.

Die Gleichung $y=1000\cdot\sqrt{2}^x$ beschreibt diese Gesetzmäßigkeit, wobei y die Taktrate und x die Anzahl der Jahre ist. x=0 bedeutet dabei das Jahr 2000.

a) Erläutere, wie die Zahlen der Formel zu Stande kommen.

Lösung:

Die Gleichung hat die Form $y=c\cdot a^x$. Da im Jahr 2000 (also bei x=0) y=1000 sein muss, gilt $1000=c\cdot a^0=c$, also hat c den Wert 1000.

Alle 2 Jahre verdoppelt sich die Taktrate, wenn also x um 2 zunimmt, muss der Faktor hinter 1000 um das 2-fache zunehmen, also $a^2=2\Rightarrow a=\sqrt{2}$.

---

b) Berechne nach diesem Modell die Taktfrequenz der Computer in den Jahren 1995 und 2010.

Lösung:

$y_{1995}=1000\cdot\sqrt{2}^{-5}=1000\cdot2^{-\frac{5}{2}}\approx1000\cdot0{,}177=177$ Die Taktrate betrug 1995 etwa 177 MHz.

$y_{2010}=1000\cdot\sqrt{2}^{10}=1000\cdot2^{\frac{10}{2}}=1000\cdot2^5=1000\cdot32=32000$ Die Taktrate wird 2010 möglicherweise 32000 MHz betragen.

---

9 Während einer Wanderung bestimmt Angelika auf folgende Weise die Höhe eines Baumes:

Am ausgestreckten Arm (50 cm vom Auge entfernt) hält sie einen 12 cm langen Bleistift so, dass er senkrecht ausgerichtet ist.

Sie stellt fest, dass ihr dabei der Baum zweimal so groß erscheint wie der Bleistift.

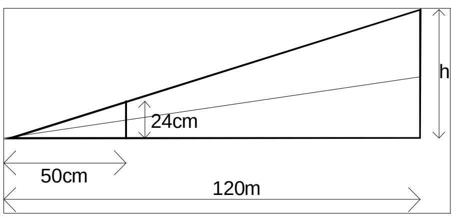
Der Baum ist bei der Messung 120 m von ihr entfernt.

Berechne aus den gegebenen Angaben die Höhe des Baums. Beschreibe in Stichworten Deine Überlegungen, z.B. warum Du welche Formel verwendest. Die Rechenschritte musst Du aufschreiben.

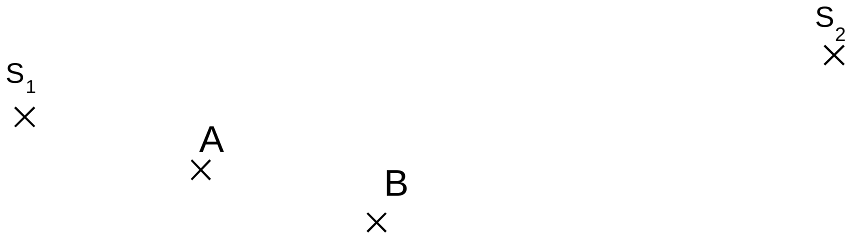
Lösung:

Nach dem 2. Strahlensatz gilt: Doppelte (!) Bleistiftlänge verhält sich zum Abstand Bleistift-Auge wie Baumhöhe zum Abstand Auge-Baum:

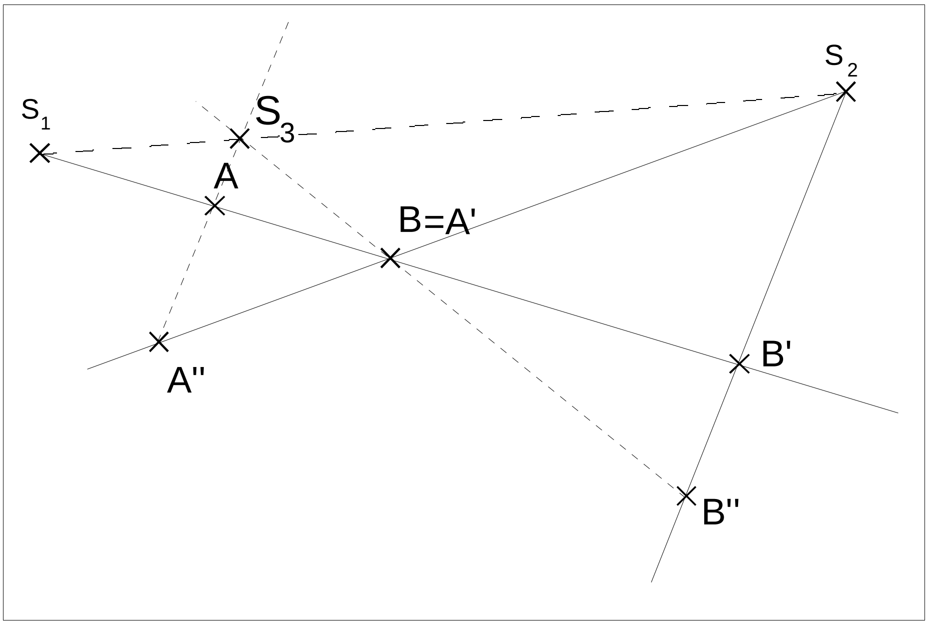
$\dfrac{2\cdot12cm}{50cm}=\dfrac{h}{120m}\Rightarrow h=\dfrac{2\cdot12\cdot120m}{50}=57{,}6m$



10 Strecke die Punkte A und B von S_1 aus mit dem Streckfaktor $k_1=2$ auf die Punkte A´ und B´.
Strecke dann die Punkte A’ und B’ von S_2 aus mit dem Streckfaktor $k_2=1{,}5$ auf die Punkte A´´ und B´´.
Finde dann durch Konstruktion heraus, wo das Streckzentrum S_3 liegt, von dem aus man die Punkte A und B direkt auf die Punkte A´´ und B´´ strecken könnte und lies aus der Zeichnung ab, wie groß k_3 wäre.
Vergleiche den aus der Zeichnung abgelesenen Wert von k_3 mit dem Wert, den Du rechnerisch für k_3 ermitteln kannst.



Lösung:



Bei genauer Zeichnung müsste S_3 auf der Strecke S_1S_2 liegen.

Der Streckfaktor k_3 ergibt sich aus $k_1 \cdot k_2 = k_3 = 2 \cdot 1{,}5 = 3$.

Aus einer genauen Zeichnung lässt sich k3 auch ablesen: $\dfrac{\overline{S_3A''}}{\overline{S_3A}} = \dfrac{\overline{S_3B''}}{\overline{S_3B}} = k_3$

Übrigens: Die Gerade durch A´´ und B´´ muss parallel zur Gerade durch A und B sein!