Lösung

1 Berechne die Lösungsmengen folgender Gleichungen

a) $x^2-9=0 \quad \rightarrow \quad x^2=9 \quad \rightarrow \quad |x|=3 \quad \rightarrow \quad x_{1,2}=\pm 3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{L}=\{-3;+3\}$

b) $x+9=0 \quad \rightarrow \quad x=-9 \quad \rightarrow \quad \mathbb{L}=\{-9\}$

c) $x^2=9^3 \quad \rightarrow \quad x^2=729 \quad \rightarrow \quad |x|=27 \quad \rightarrow \quad x_{1,2}=\pm 27 \quad \rightarrow \quad \mathbb{L}=\{-27;+27\}$

2 Mache den Nenner rational (d.h.: wandle den Bruch so um, dass im Nenner keine Wurzel mehr vorkommt):

$$\frac{3}{\sqrt{5}-7} \stackrel{\sqrt{5}+7}{=} \frac{3\cdot(\sqrt{5}+7)}{(\sqrt{5}-7)(\sqrt{5}+7)}=\frac{3\cdot\sqrt{5}+21}{5-49}=\frac{3\cdot\sqrt{5}+21}{-44}$$

3 Bestimme die Definitionsmenge für folgenden Term: $\sqrt{9-\sqrt{x}}$

Da der Radikand einer Wurzel nicht negativ sein darf, muss gelten $x\geq 0$ *.*
Damit unter der äußeren Wurzel keine negative Zahl steht, darf von 9 nicht mehr als $9=\sqrt{81}$ *subtrahiert werden. Weiter muss für x also gelten* $x\leq 81$ *.*
Zusammengefasst ergibt sich die Definitionsmenge $\mathbb{D}=\{x\,|\,0\leq x\leq 81\}$ *.*

4 Bringe den konstanten Faktor unter die Wurzel und vereinfache unter der Wurzel so weit wie möglich

a) $6\cdot\sqrt{4-k}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{4-k}=\sqrt{36\cdot(4-k)}=\sqrt{144-36k}$

b) $\frac{5b^2c}{4}\cdot\sqrt{\frac{6b}{c^2}}=\sqrt{\frac{25b^4c^2}{16}}\cdot\sqrt{\frac{6b}{c^2}}=\sqrt{\frac{25b^4c^2\cdot 6b}{16c^2}}=\sqrt{\frac{25\cdot 3b^5}{8}}=\sqrt{\frac{75b^5}{8}}$

5 Löse die Klammern auf und vereinfache so weit wie möglich (teilweises Wurzelziehen, Kürzen, Zusammenfassen).

a) $(3\sqrt{7}+\sqrt{11})(3\sqrt{7}-\sqrt{11})=9\cdot 7-11=63-11=52$

b) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{8}+\sqrt{3})=\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{16}+\sqrt{6}-\sqrt{24}-\sqrt{9}=$
$4+\sqrt{6}-\sqrt{4\cdot 6}-3=4+\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{6}-3=1-\sqrt{6}$

c) $\left(\sqrt{7}-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{7}}-\sqrt{7}\right)=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}-\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}-\frac{1}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=1-7-\frac{1}{7}+1=-5-\frac{1}{7}=-\frac{35}{7}-\frac{1}{7}=-\frac{36}{7}$

d) $(2\sqrt{a}+3\sqrt{b})(4\sqrt{b}-2\sqrt{a})=8\sqrt{ab}-4a+12b-6\sqrt{ab}=-4a+12b+2\sqrt{ab}$

6 Fasse zusammen und vereinfache so weit wie möglich. Falls Wurzeln stehen bleiben, sollen die ganzen Zahlen unter den Wurzeln so klein wie möglich sein.

a) $\sqrt{20b^3}:\sqrt{5b^5}=\sqrt{\frac{20b^3}{5b^5}}=\sqrt{\frac{4}{b^2}}=\frac{2}{|b|}$

b) $\sqrt{48}-\sqrt{3}=\sqrt{16\cdot 3}-\sqrt{3}=4\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

c) $-\sqrt{d}+9\cdot\sqrt{d}=(-1+9)\cdot\sqrt{d}=8\cdot\sqrt{d}$

d) $\sqrt{125}-\sqrt{80}-\sqrt{45}=\sqrt{25\cdot 5}-\sqrt{16\cdot 5}-\sqrt{9\cdot 5}=5\cdot\sqrt{5}-4\cdot\sqrt{5}-3\sqrt{5}=-2\cdot\sqrt{5}$

---

7 Zeige durch Rechnung (ohne Taschenrechner), dass

$\sqrt{14-8\sqrt{3}}=\sqrt{8}-\sqrt{6}$

Beide Seiten der Gleichung werden quadriert und dann umgeformt:

linke Seite: $\left(\sqrt{14-8\sqrt{3}}\right)^2=14-8\sqrt{3}$

rechte Seite: $\left(\sqrt{8}-\sqrt{6}\right)^2=\sqrt{8^2}-2\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{6^2}=8-2\cdot\sqrt{48}+6=14-2\cdot\sqrt{16\cdot 3}=14-2\cdot 4\cdot\sqrt{3}=14-8\cdot\sqrt{3}$

Da beide Seiten übereinstimmen und in der Ausgangsgleichung die Terme auf beiden Seiten positiv sind, ist die gegebene Gleichung wahr.

---

8 Wandle $5,\overline{72}$ rechnerisch in einen Bruch um, der so weit wie möglich gekürzt ist.

$x=5,\overline{72} \rightarrow 100x=572,\overline{72} \rightarrow 99x=572,\overline{72}-5,\overline{72}=567 \rightarrow x=\frac{567}{99}=\frac{63}{11}$

---

9 Ein alter Löschteich hat eine quadratische Fläche mit der Seitenlänge 8m.
Er soll so vergrößert werden, dass seine Fläche 5-mal so groß wird und er wieder quadratisch ist.
Berechne die Seitenlänge des vergrößerten Teichs.

Wenn die Seitenlänge des alten quadratischen Teichs $8\,m$ *beträgt, dann hat er einen Flächeninhalt von* $8\,m\cdot 8\,m=64\,m^2$ *.*

Der neue Teich ist 5-mal so groß. Er hat also einen Flächeninhalt von $5\cdot 64\,m^2=320\,m^2$ *.*
Seine Seitenlänge ist dann $\sqrt{320\,m^2}\approx 17{,}9\,m$ *.*

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!