Lösung

1 Zur Klassenkonferenz sind 3 Schüler, 2 Eltern und 10 Lehrer erschienen.

a) Berechnen Sie, wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, Schüler, Eltern und Lehrer an einem runden Tisch nebeneinander zu platzieren, wenn unter den Personen der einzelnen Gruppen nicht unterschieden wird.

Ohne den runden Tisch wird die Lösung nach der Formel $\frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$ *gefunden:*

$\frac{(3+2+10)!}{3!\cdot 2!\cdot 10!}=\frac{15!}{3!\cdot 2!\cdot 10!}=30030$ *Da die Personen aber kreisförmig aufgereiht werden, sind jeweils 15 der gefundenen Reihenfolgen identisch, da der Anfangspunkt der Reihe bei jeder der 15 Personen gewählt werden kann. Man muss also 30030 noch durch 15 dividieren:*

$\frac{30030}{15}=2002$ *Es gibt also 2002 Möglichkeiten, die Personen anzuordnen.*

b) Von den an der Konferenz teilnehmenden Personen sollen 4 zufällig ausgewählt werden, die ein Anliegen bei der Schulleitung vortragen sollen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich dabei dann um 2 Lehrer, 1 Schüler und 1 Elternteil handelt.

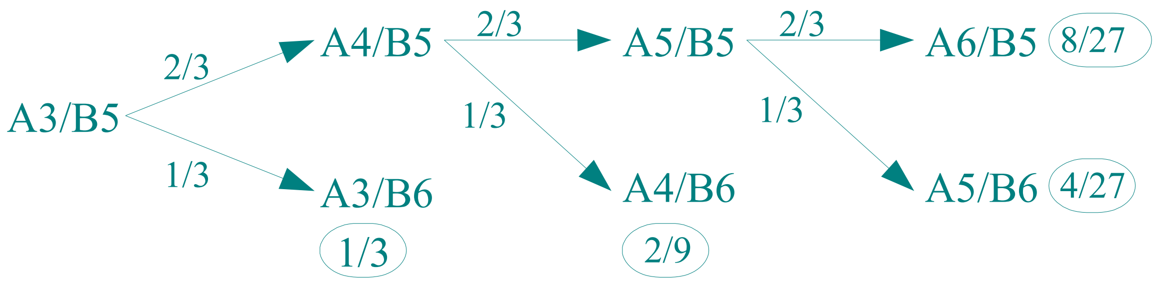
Es gibt $\binom{15}{4}$ *Möglichkeiten, 4 Personen aus 15 zu wählen,* $\binom{10}{2}$ *Möglichkeiten für die Wahl der Lehrer,* $\binom{3}{1}$ *Möglichkeiten für die Wahl der Schüler und* $\binom{2}{1}$ *Möglichkeiten für die Wahl der Eltern:* $\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{15}{4}}=\frac{18}{91}\approx 0{,}1978$

In knapp 20% aller Fälle wird also die beschriebene Auswahl gewählt werden.

---

2 2 Spieler A und B spielen eine Reihe Spiele gegeneinander. Wer zuerst 6 Spiele gewonnen hat, bekommt einen Geldpreis von 100 €.
Aus der Erfahrung weiß man, dass Spieler A doppelt so häufig gewinnt wie Spieler B.
Merkwürdigerweise hat nach 8 Spielen A nur 3, B aber 5 Spiele gewonnen.
A ist nun nicht mehr in der Lage weiter zu spielen und gibt auf.
Der Preis soll so auf beide Spieler aufgeteilt werden, dass die Anteile proportional zu den Gewinn-Chancen der Spieler sind.
Berechnen Sie, wie viel jeder der Spieler als Preisgeld bekommt. Gehen Sie dabei davon aus, dass Spieler A seine alte Stärke in den folgenden Spielen hätte zeigen können.

Man muss so lange spielen, bis ein Spieler 6 Spiele gewonnen hat. Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich am besten mit Hilfe eines Pfaddiagramms berechnen. Es wird jeweils angegeben, *wie viele Spiele A und B gewonnen haben:*



Es gilt: $p(A)=\frac{8}{27}$ *und* $p(B)=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}=\frac{9+6+4}{27}=\frac{19}{27}$

Die 100 € sollten also im Verhältnis 8:19 zwischen A und B aufgeteilt werden, d.h. A bekommt 29,63 € und B bekommt 70,37 €.

---

3 Im Supermarkt werden Äpfel in Tüten verpackt angeboten. Laut Aufschrift sollen 1 kg Äpfel in jeder Tüte sein. Die Standardabweichung vom Sollgewert beträgt 20 g.
Berechnen Sie, welche Abweichung vom angegebenen Wert (1 kg) man in Kauf nehmen muss, wenn in höchstens 10% der Fälle eine größere Abweichung eintreten soll.

Es gilt $\mu=1000$ *und* $\sigma=20$ *(Einheit g wird weggelassen).*

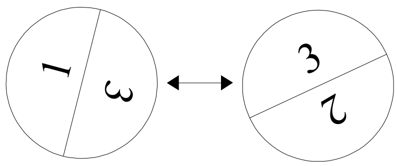
Mit der Tschebyscheffschen Ungleichung $P(|X-\mu|\geq c)\leq\frac{\sigma^2}{c^2}$ *gilt*

$$\frac{\sigma^2}{c^2}=0{,}1 \;\Rightarrow\; c^2=\frac{\sigma^2}{0{,}1}=\frac{400}{0{,}1}=4000 \;\Rightarrow\; c=\sqrt{4000}\approx 63{,}24$$

Also müssen etwa 63g Abweichung in Kauf genommen werden.

---

4 Bei den nebenstehenden Glücksrädern sind die Zahlen gewählt, auf die die Pfeilspitzen zeigen.
Man erhält die Summe der Ergebniszahlen als Gewinn in Euro.
Wenn allerdings zwei gleiche Zahlen auftauchen, erhält man nichts.



a) Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung für den Gewinn bei einem Spiel.

k	*p(X=k)*	*k ·p(X=k)*	*k-E(X)*	*(k-E(X))²*	*(k-E(X))²·p(X=k)*
0	1/4	0	-3	9	9/4
3	1/4	3/4	0	0	0
4	1/4	1	1	1	1/4
5	1/4	5/4	2	4	1
		E(X)=12/4=3			*V(X)*=14/4=3,5
					$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{3{,}5}\approx 1{,}87$

b) Berechnen Sie, wie hoch der Spieleinsatz sein muss, damit das Spiel fair ist, d.h. dass weder Spieler noch Spielanbieter auf lange Sicht Gewinn machen können.

Da der Erwartungswert für den Gewinn 3 € beträgt, muss als Einsatz 3 € festgelegt werden, damit das Spiel fair ist.

---

5 Nachdem in der Schule ein neues Mathematikbuch eingeführt wurde, sollen die Leistungen der Schüler besser geworden sein. Zu diesem Urteil kam man, als man die Durchschnittsnoten der Schüler vor und nach der Einführung des neuen Buches verglich. Überprüfen Sie an Hand eines Vorzeichentests, ob man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% wirklich annehmen kann, dass die Noten besser geworden sind.

Klasse	7a	7b	7c	8a	8b	8c	9a	9b	9c	10a	10b	10c
Note vorher	2,9	3,1	3,0	2,5	2,7	3,1	2,9	3,8	3,2	2,9	3,5	3,2
Note nachher	2,8	3,3	2,8	2,4	2,8	2,7	2,8	3,4	3,1	2,5	3,4	3,9
	+	–	+	+	–	+	+	+	+	+	+	–

9 mal ist die Note besser geworden, 3 mal schlechter.

Die Nullhypothese ist H_0: An den Leistungen hat sich nichts geändert, also $p=0,5$.

Die Gegenhypothese H_1 bei diesem rechtsseitigen Vorzeichentest heißt dann: Die Leistungen sind besser geworden, also $p>0,5$.

Festlegung des Ablehnungsbereichs bei der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha=0,05$:

$$p(k=12)=\binom{12}{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\approx 0,00024<0,05$$

$$p(k=11)=\binom{12}{11}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\approx 0,00293 \quad\Rightarrow\quad p(k\geq 11)\approx 0,00317<0,05$$

$$p(k=10)=\binom{12}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\approx 0,01611 \quad\Rightarrow\quad p(k\geq 10)\approx 0,01928<0,05$$

$$p(k=9)=\binom{12}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\approx 0,05371 \quad\Rightarrow\quad p(k\geq 9)\approx 0,07238>0,05$$

Da die Fehlerwahrscheinlichkeit maximal 5% sein soll, ist der Ablehnungsbereich: $K=\{10,11,12\}$

Da $9\notin K$, kann man nicht mit 5% Fehlerwahrscheinlichkeit behaupten, die Leistungen hätten sich verbessert. Die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden.

---

6 Bei der letzten Bundestagswahl haben 40% die MPD gewählt. In einer Testabstimmung erreichte die MPD bei den Schülern einer Schule ebenfalls 40%.
Jetzt liegt die MPD im Land nur noch bei 25% Stimmanteil.

Vermutet wird allerdings, dass sich die Schüler auch jetzt noch zu 40% für die MPD aussprechen würden, dass sich also ihr Wahlverhalten nicht geändert hat.
Um diese Vermutung zu überprüfen, werden 80 Schüler befragt: 27 davon sind Anhänger der MPD.
Führen Sie einen Alternativtest durch, um zu entscheiden, ob die Schüler weiterhin mit 40% die MPD wählen würden (Irrtumswahrscheinlichkeit 10%), oder ob die MPD auch bei den Schülern auf 25% abgesackt ist.
Geben Sie an, wie groß der Fehler 1. Art ist und wie groß der Fehler 2. Art ist und geben Sie mit Begründung an, wie Sie sich in der Frage „40% oder 25%“ entscheiden würden.

Die Nullhypothese ist H_0: $p_0=0{,}40$, die Gegenhypothese ist H_1: $p_1=0{,}25$
Für H_0 gilt die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha=0{,}1$.
Der Stichprobenumfang beträgt $n=80$.
Die Umfrage ergab $k=27$.

Da wahrscheinlich weniger als 40% die MPD gewählt haben werden, wird linksseitig getestet, d.h.der Ablehnungsbereich wird ermittelt aus $P_0(X \le g_0)=\alpha$.
Die Tabelle ergibt (siehe Markierung bei p=0,4) $g_0=25$ und damit den Ablehnungsbereich $K_0=\{0,1,2,3,...,24,25\}$
Wegen $k=27$ liegt das Ergebnis nicht im Ablehnungsbereich der Nullhypothese. Deshalb kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.

Der Ablehnungsbereich der Gegenhypothese H_1 ergibt sich aus K_0: $K_1=\{26,27,...,79,80\}$
Für die Irrtumswahrscheinlichkeit β (Fehler 2. Art) ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung: $P_1(X \ge 26)=\beta$ und damit aus der Tabelle (siehe Markierung bei p=0,2) $P_1(X \ge 26)=1-P_1(X \le 25)=1-0{,}9195=0{,}0805$. Also gilt $\beta=0{,}08$.
Da $k=27$ im Ablehnungsbereich der Gegenhypothese H_1 liegt, wird die Gegenhypothese abgelehnt, d.h. man geht davon aus, dass die Schüler weiterhin zu 40% die MPD gewählt haben. Diese Entscheidung hat eine Fehlerwahrscheinlichkeit von 8% (Fehler 2. Art).

Das Umfrageergebnis liegt sehr dicht an der Grenze des Ablehnungsbereichs. Schon 2 Stimmen (2,5% der abgegebenen Stimmen) weniger für die MPD hätte das Urteil anders ausfallen lassen. In diesem Fall wäre es sinnvoll, die Umfrage mit einem größeren Stichprobenumfang zu wiederholen, um eine bessere Trennschärfe zwischen den Alternativen zu erreichen.

Tabelle zu n=80 auf der nächsten Seite!

Formeln:

n Kugeln - k Ziehungen	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
geordnete Stichprobe	n^k	$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$
ungeordnete Stichprobe	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Tschebyscheffsche Ungleichung: $P(|X-\mu|\ge c)\le\frac{\sigma^2}{c^2}$ $B_{n;p}(k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$ mit $q=1-p$

n	k	p				
		0,1	0,25	0,3	0,4	0,5
80	0	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,0022	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,0107	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,0353	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,0880	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,1769	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,3005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,4456	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	8	0,5927	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
	9	0,7234	0,0018	0,0001	0,0000	0,0000
	10	0,8266	0,0047	0,0002	0,0000	0,0000
	11	0,8996	0,0106	0,0006	0,0000	0,0000
	12	0,9462	0,0221	0,0015	0,0000	0,0000
	13	0,9733	0,0421	0,0036	0,0000	0,0000
	14	0,9877	0,0740	0,0079	0,0000	0,0000
	15	0,9947	0,1208	0,0161	0,0000	0,0000
	16	0,9979	0,1841	0,0302	0,0001	0,0000
	17	0,9992	0,2636	0,0531	0,0003	0,0000
	18	0,9997	0,3563	0,0873	0,0007	0,0000
	19	0,9999	0,4572	0,1352	0,0017	0,0000
	20	1,0000	0,5597	0,1978	0,0036	0,0000
	21	1,0000	0,6574	0,2745	0,0072	0,0000
	22	1,0000	0,7447	0,3627	0,0136	0,0000
	23	1,0000	0,8181	0,4579	0,0245	0,0001
	24	1,0000	0,8761	0,5549	0,0417	0,0002
	25	1,0000	0,9195	0,6479	0,0675	0,0005
	26	1,0000	0,9501	0,7323	0,1037	0,0012
	27	1,0000	0,9705	0,8046	0,1521	0,0024
	28	1,0000	0,9834	0,8633	0,2131	0,0048
	29	1,0000	0,9911	0,9084	0,2861	0,0092
	30	1,0000	0,9954	0,9413	0,3687	0,0165
	31	1,0000	0,9978	0,9640	0,4576	0,0283
	32	1,0000	0,9990	0,9789	0,5484	0,0465
	33	1,0000	0,9995	0,9882	0,6364	0,0728
	34	1,0000	0,9998	0,9937	0,7175	0,1093
	35	1,0000	0,9999	0,9968	0,7885	0,1572
	36	1,0000	1,0000	0,9984	0,8477	0,2170
	37	1,0000	1,0000	0,9993	0,8947	0,2882
	38	1,0000	1,0000	0,9997	0,9301	0,3688
	39	1,0000	1,0000	0,9999	0,9555	0,4555
	40	1,0000	1,0000	0,9999	0,9729	0,5445
	41	1,0000	1,0000	1,0000	0,9842	0,6312
	42	1,0000	1,0000	1,0000	0,9912	0,7118
	43	1,0000	1,0000	1,0000	0,9953	0,7830
	44	1,0000	1,0000	1,0000	0,9976	0,8428
	45	1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,8907
	46	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9272
	47	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9535
	48	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9717
	49	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9835
	50	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9908

Viel Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben!