Thema: Vektorrechnung - Gerade, Ebenenschar und Kugel

Gegeben sind die Gerade g und die Ebenenschar E_a durch

$$g: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \qquad E_a: \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}$$

1 Alle Ebenen der Ebenenschar bis auf eine einzige enthalten jeweils einen Punkt, bei dem alle drei Koordinaten gleich sind. Bestimmen Sie den Parameter a der Ebene, die keinen Punkt mit drei gleichen Koordinaten besitzt.

Ansatz für einen Punkt mit drei gleichen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix}x=2-s+ta\\ x=t\\ x=1+s \rightarrow s=x-1\end{matrix} \rightarrow x=2-(x-1)+x\cdot a \rightarrow x=2-x+1+x\cdot a \rightarrow$$

$2x-a\cdot x=3 \rightarrow x\cdot(2-a)=3 \rightarrow x=\frac{3}{2-a}$ Da für a=2 der Nenner des Bruchs zu 0 würde, gibt es für diesen Parameter a keinen Punkt mit drei gleichen Koordinaten.

2 Die Gerade g enthält die Mittelpunkte von Kugeln mit dem Radius 5.
Ermitteln Sie durch Rechnung, ob alle Ebenen der Ebenenschar Tangentialebene an einer dieser Kugeln sein können.

Gefordert ist also: Der Abstand des Kugelmittelpunktes zur Ebene soll 5 betragen.
Abstandsbestimmung mit Hilfe der Hesseschen Normalenform (HNF):

Normalenvektor der Ebene: $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\a\\-1\end{pmatrix}=\vec{n}$

Normalenform (NF): $\begin{pmatrix}-1\\a\\-1\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)=0 \rightarrow \begin{pmatrix}-1\\a\\-1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}+2+1=0 \rightarrow \begin{pmatrix}-1\\a\\-1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}+3=0$

Länge von $\vec{n}$: $|\vec{n}|=\sqrt{(-1)^2+a^2+(-1)^2}=\sqrt{a^2+2}$

HNF: $\frac{1}{\sqrt{a^2+2}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\a\\-1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}+\frac{3}{\sqrt{a^2+2}}=0$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{a^2+2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-a\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-\frac{3}{\sqrt{a^2+2}}=0$

Koordinaten des Mittelpunkts (Punkt auf der Geraden g) einsetzen:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-a\\1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right)-\frac{3}{\sqrt{a^2+2}}=\pm 5 \quad |\cdot\sqrt{a^2+2}$$

$$\begin{pmatrix}1\\-a\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-r\\1+r\\2r\end{pmatrix}-3=\pm 5\cdot\sqrt{a^2+2} \rightarrow 1-r-a-ar+2r-3=\pm\sqrt{5} \rightarrow r\cdot(2-1-a)=\pm 5\cdot\sqrt{a^2+2}-1+a+3 \rightarrow$$

$$r\cdot(1-a)=\pm 5\cdot\sqrt{a^2+2}+2+a \rightarrow r=\frac{\pm 5\cdot\sqrt{a^2+2}+2+a}{1-a}$$

Daraus folgt: Für alle a außer a=1 gibt es eine Ebene mit den geforderten Eigenschaften.

Die Ebene E_1 kann nicht Tangentialebene zu einer Kugel mit dem Radius 5 sein, deren Mittelpunkt auf der Geraden g liegt.

3 Zeigen Sie durch Rechnung, dass es keine Ebene gibt, auf der die Gerade senkrecht steht. Ermitteln Sie das a, für das die entsprechende Ebene und die Gerade den maximalen Winkel einschließen.

Wenn eine Gerade senkrecht zu einer Ebene ist, müssen der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden und der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene kollinear sein:

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}-1\\a\\-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix}-1=-r\\1=a\cdot r\\2=-r\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}r=1\\ \\r=-2\end{matrix}$$

Widerspruch, es gibt also keine Gerade, die senkrecht zur Ebene steht.

Berechnung zum maximalen Winkel zwischen Gerade und Ebene:

Winkelberechnung nach der Formel $\cos(90°-\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$

bzw. $\sin(\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\a\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{a^2+2}}=\frac{a-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{a^2+2}}$

Mit α wird auch $\sin(\alpha)=z$ größer. Man sucht also das maximale z für $z=\frac{a-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{a^2+2}}$.

$$z'(a)=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{a^2+2}-(a-1)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{a^2+2}}\cdot 2a}{a^2+2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{a^2+2-a^2+a}{(a^2+2)\cdot\sqrt{a^2+2}}=\frac{a+2}{(a^2+2)\cdot\sqrt{a^2+2}\cdot\sqrt{6}}$$

$$z'(a)=0 \rightarrow a=-2 \rightarrow z(-2)=\frac{-2-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{4+2}}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2} \rightarrow \sin\alpha=-\frac{1}{2} \rightarrow \alpha=-30°$$

Wegen $z(-1{,}9)<-0{,}5$ und $z(-2{,}1)<-0{,}5$ ist 30° der maximale Winkel zwischen Gerade und Ebene.

4 Aus der Gerade wird durch die x-y-Ebene und die y-z-Ebene eine Strecke herausgeschnitten.
Berechnen Sie den a-Wert der Ebene, die diese Strecke halbiert.

Schnitt mit der x-y-Ebene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 1 - r \\ y = 1 + r \\ 0 = 2r \rightarrow r = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{matrix}$$ Schnittpunkt $S_{xy} = (1/1/0)$

Schnitt mit der y-z-Ebene:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 = 1 - r \rightarrow r = 1 \\ y = 1 + r \\ z = 2r \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{matrix}$$ Schnittpunkt $S_{yz} = (0/2/2)$

Mittelpunkt bestimmen:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$, also $M\left(\frac{1}{2} / \frac{3}{2} / 1\right)$

M muss auf der Ebene liegen:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{2} = 2 - s + t \cdot a \\ \frac{3}{2} = t \\ 1 = 1 + s \rightarrow s = 0 \end{matrix} \rightarrow \frac{1}{2} = 2 - 0 + \frac{3}{2} \cdot a \rightarrow -\frac{3}{2} \cdot a = \frac{3}{2} \cdot a \rightarrow a = -1$$

Die Ebene E_{-1} halbiert die Verbindungsstrecke zwischen den Koordinatenebenen.