Thema: Stochastik - Kombinatorik, Standardabweichung, bedingte Wahrscheinlichkeit, hypergeometrische Verteilung

In der Klassenstufe 11 finden Leistungskurswahlen statt. Folgende Leistungskurse werden angeboten:
A-Feld: Deutsch, Englisch, Musik
B-Feld: Politik, Religion
C-Feld: Mathematik, Physik, Chemie, Biologie, Informatik
Bei allen Aufgaben wird (unrealistischerweise) angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit für die Wahl jedes Faches gleich groß ist.

Anzahl der Fächer in den Feldern: A - 3 ; B - 2 ; C - 5 ; insgesamt 10 Fächer

1 1.1 Berechnen Sie, wie viele verschiedene Wahlmöglichkeiten die Schüler haben, wenn sie 2 Leistungskurse wählen müssen und

a) keine Einschränkung bei der Fächerwahl gemacht wird,

Wenn zwischen 1. und 2. Leistungsfach unterschieden wird: $10 \cdot 9 = 90$ Wahlmöglichkeiten.

Wenn nicht zwischen 1. und 2. Leistungsfach unterschieden wird: $\binom{10}{2} = 45$ Wahlmöglichkeiten.

b) aus jedem Aufgabenfeld jeweils nur 1 Fach gewählt werden darf.

$$\frac{1}{2} \cdot (\underset{A}{3} \cdot \underset{B+C}{7} + \underset{B}{2} \cdot \underset{A+C}{8} + \underset{C}{5} \cdot \underset{A+B}{5}) = \frac{1}{2} \cdot (21 + 16 + 25) = \frac{1}{2} \cdot 62 = 31 \quad \text{oder} \quad \underset{A}{3} \cdot \underset{B}{2} + \underset{A}{3} \cdot \underset{C}{5} + \underset{B}{2} \cdot \underset{C}{5} = 31$$

1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schüler einen Leistungskurs aus dem A-Feld und einen aus dem B-Feld wählt, oder dass er beide Kurse aus dem C-Feld wählt.

$$p\left((1 \, aus \, A \, und \, 1 \, aus \, B) \, oder \, (2 \, aus \, C)\right) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{5}{0} + \binom{3}{0} \cdot \binom{2}{0} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6+10}{45} = \frac{16}{45} \approx 0{,}36$$

1.3 5 Schüler würfeln ihre Wahl für das 1. Leistungsfach aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass mindestens 2 von ihnen das selbe Fach wählen.

$$p(mindestens \, 2 \, das \, gleiche \, Fach) = 1 - p(alle \, Fächer \, verschieden) =$$

$$1 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = 1 - 0{,}30240 = 0{,}6976 \approx 0{,}70$$

In etwa 70% aller Fälle wählen mindestens 2 Schüler das selbe Fach.

2 Für jedes der Aufgabenfelder A, B und C hat sich ein Förderverein gebildet. Diese Vereine zahlen für die Wahl eines Fachs aus dem eigenen Aufgabenfeld einen festgelegten Betrag: A-Feld 60 €, B-Feld 40 €, C-Feld 70 €.
Die Schüler haben zu 40% ein A-Fach, zu 20% ein B-Fach und zu 40% ein C-Fach gewählt. Berechnen Sie, wie viel Geld die Schule pro Schüler als Unterstützung bekommt und wie groß die Standardabweichung von diesem Betrag ist.

$A - 60€ \quad B - 40€ \quad C - 70€$
$A - 40\% \quad B - 20\% \quad C - 40\%$ $\quad X: gespendeter\ Betrag$

Berechnung des Erwartungswertes für die Einnahme:

Feld	x_i	$p(X=x_i)$	$x_i \cdot p(X=x_i)$	$x_i - E(X)$	$(x_i-E(X))^2$	$(x_i-E(X))^2 \cdot p(X=x_i)$
A	60	0,4	24	0	0	0
B	40	0,2	8	-20	400	80
C	70	0,4	28	10	100	40
			E(X)=60			V(X)=120
						σ(X)≈11

Der Erwartungswert beträgt 60 € und die Standardabweichung hat etwa den Betrag 11 €.

3 Bei einer Umfrage vor der Fächerwahl hatten von insgesamt 80 Schülern 20 angegeben, sie würden ein Fach aus dem A-Feld wählen. 40 wollten ein C-Fach wählen. Insgesamt 50 gehörten einer dieser beiden Gruppen an.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schüler, der kein A-Fach als Leistungsfach wählen wollte auch kein Interesse an einem C-Fach hatte.

$$p(A)=\frac{20}{80}\ ;\ p(C)=\frac{40}{80}\ ;\ p(A\cup C)=\frac{50}{80}$$

$$p_{\bar{A}}(\bar{C})=\frac{p(\bar{A}\cap\bar{C})}{p(\bar{A})}=\frac{1-p(\overline{\bar{A}\cap\bar{C}})}{1-p(A)}=\frac{1-p(A\cup C)}{1-p(A)}=\frac{1-\frac{5}{8}}{1-\frac{2}{8}}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{6}{8}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 50%.

4 Drei Leistungsfächer müssen an einem Nachmittag unterrichtet werden.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei der Auslosung dieser Fächer 2 C-Fächer und 1 A-Fach gewählt werden.

$$\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{0}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{3\cdot 1\cdot 10}{120}=\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$$ Die Wahrscheinlichkeit beträgt 25%.