Thema: Analysis - gebrochenrationale Funktionenschar

Gegeben ist die Funktion f durch ihre Gleichung $f(x)=\frac{x^2+3x}{x-1}$

1 Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen mit ihren Koordinatenachsen.

y-Achse: $x=0 \rightarrow f(0)=\frac{0+0}{0-1}=\frac{0}{-1}=0 \rightarrow (0/0)$

x-Achse: $y=0 \rightarrow \frac{x^2+3x}{x-1}=0 \rightarrow x^2+3x=0 \rightarrow x\cdot(x+3)=0 \rightarrow x_1=0; x_2=-3 \rightarrow (0/0);(-3/0)$

Untersuchen Sie die Kurve auf lokale Maxima und Minima.

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(x-1)-(x^2+3x)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x+3x-3-x^2-3x}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-3)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x-3)\cdot 2}{(x-1)^3}=$$

$$\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x+6}{(x-1)^3}=\frac{8}{(x-1)^3}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow x^2-2x-3=0 \rightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm 2 \rightarrow x_1=3 \;;\; x_2=-1$$

$$f''(3)=\frac{8}{8}>0 \rightarrow \text{Minimum} \quad ; \quad f''(-1)=\frac{8}{-1}<0 \rightarrow \text{Maximum}$$

$$f(3)=\frac{9+9}{3-1}=\frac{18}{2}=9 \rightarrow \text{Minimum bei } (3/9) \;;\; f(-1)=\frac{1-3}{-1-1}=\frac{-2}{-2}=1 \rightarrow \text{Minimum bei } (-1/1)$$

Berechnen Sie die Gleichungen ggf. vorhandener senkrechter, waagrechter und/oder schräger Asymptoten.

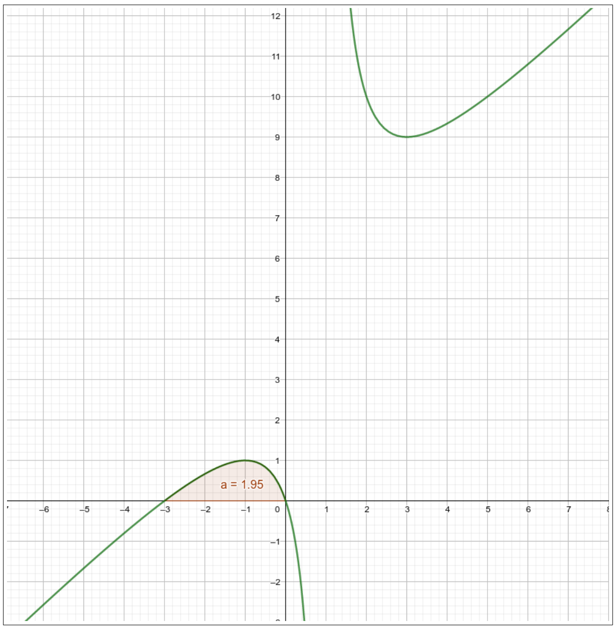
senkrechte Asymptote: Nenner gleich 0 $\rightarrow$ $x=1$

wegen grad(Zähler) > grad(Nenner) keine waagrechte Asymptote

schräge Asymptote: $(x^2+3x):(x-1)=x+4+\frac{4}{x-1}$

$$\begin{array}{l} \underline{x^2-x} \\ \quad 4x \\ \quad \underline{4x-4} \\ \qquad 4 \end{array}$$

schräge Asymptote: $y=x+4$



Skizzieren Sie den Graph der Funktion.

Ein Flächenstück wird vom Graph der Funktion und der x-Achse vollständig eingeschlossen. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.

Das Flächenstück ist eingeschlossen im Bereich $-3\le x\le 0$.

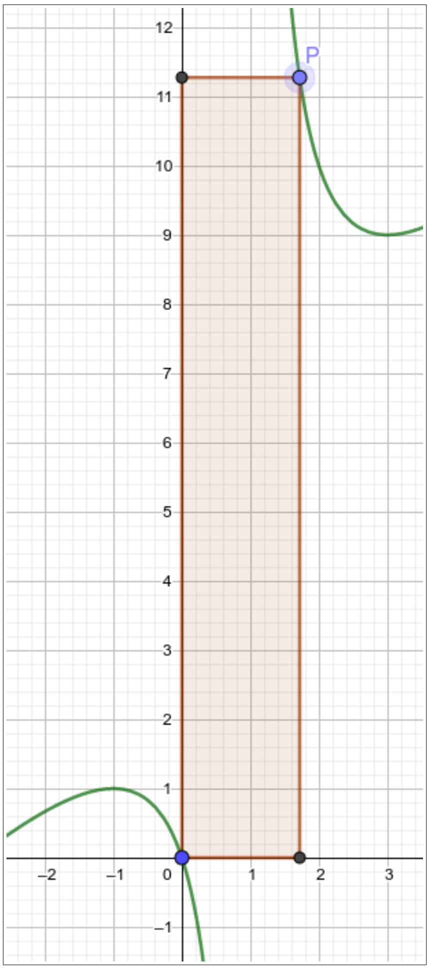
$$\int_{-3}^{0} \frac{x^2+3x}{x-1}\,dx \overset{z=x-1}{=} \int_{-4}^{-1} \frac{(z+1)^2+3(z+1)}{z}\,dz = \int_{-4}^{-1} \frac{z^2+2z+1+3z+3}{z}\,dz = \int_{-4}^{-1} \frac{z^2+5z+4}{z}\,dz = \int_{-4}^{-1} z+5+\frac{4}{z}\,dz =$$

$$\left[\frac{z^2}{2}+5z+4\cdot\ln|z|\right]_{-4}^{-1} = \left(\frac{1}{2}-5+0\right)-(8-20+4\cdot\ln 4) = -\frac{15}{2}+15-4\cdot\ln 4 = \frac{15}{2}-4\cdot\ln 4 \approx 1{,}95$$

Das eingeschlossene Flächenstück hat etwa den Flächeninhalt 1,95.

2 Ein Rechteck ist durch folgende Angaben definiert: Der eine Eckpunkt liegt im Punkt (0/0), der diagonal gegenüberliegende Eckpunkt P liegt im Bereich x>1 auf dem Graphen der Funktion f.

Berechnen Sie den x-Wert dieses auf dem Graphen liegenden Eckpunktes für den Fall, dass das Rechteck minimalen Flächeninhalt hat und geben Sie den Flächeninhalt dieses minimalen Rechtecks an.



Die nebenstehende Abbildung zeigt ungefähr das Lösungsrechteck.

Die Variable u gibt den x-Wert des Punktes A an. Dann gilt für die Fläche A(u):

$$A(u) = u\cdot f(u) = u\cdot\frac{u^2+3u}{u-1} = \frac{u^3+3u^2}{u-1}$$

Berechnung des minimalen A(u):

$$A'(u) = \frac{(3u^2+6u)\cdot(u-1)-(u^3+3u^2)\cdot 1}{(u-1)^2} =$$

$$\frac{3u^3-3u^2+6u^2-6u-u^3-3u^2}{(u-1)^2} = \frac{2u^3-6u}{(u-1)^2}$$

$$A'(u)=0 \rightarrow 2u^3-6u=0 \rightarrow 2u\cdot(u^2-3) \rightarrow u_1=0\ ;\ u_{2,3}=\pm\sqrt{3}$$

Da u>1 gefordert ist, kommt nur die Lösung $u=+\sqrt{3}$ in Frage.

$$A''(u) = \frac{(6u^2-6)\cdot(u-1)^2-(2u^3-6u)\cdot 2\cdot(u-1)\cdot 1}{(u-1)^4} =$$

$$\frac{(6u^2-6)\cdot(u-1)-(2u^3-6u)\cdot 2}{(u-1)^3} = \frac{6u^3-6u^2-6u+6-4u^3+12u}{(u-1)^3}$$

$$= \frac{2u^3-6u^2+6u+6}{(u-1)^3}$$

$A''(+\sqrt{3}) = \frac{6\cdot\sqrt{3}-18+6\cdot\sqrt{3}+6}{\left(\sqrt{3}-1\right)^3} = \frac{12\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)^3} = \frac{12}{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} > 0$ Es liegt also ein Minimum vor.

Der Flächeninhalt beträgt

$$A(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}^3+3\cdot\sqrt{3}^2}{\sqrt{3}-1} = \frac{3\cdot\sqrt{3}+9}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(3\cdot\sqrt{3}+9\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{9+3\cdot\sqrt{3}+9\cdot\sqrt{3}+9}{3-1} = \frac{18+12\cdot\sqrt{3}}{2} = 9+6\cdot\sqrt{3} \approx 19{,}4$$

Nun wird die Funktionenschar $f_a(x)=\frac{x^2+ax}{x-1}$ untersucht.

3 Berechnen Sie, für welche a-Werte der Funktionsgraph ein lokales Maximum und ein lokales Minimum besitzen kann.

$$f_a'(x)=\frac{(2x+a)\cdot(x-1)-(x^2+a\cdot x)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x+a\cdot x-a-x^2-a\cdot x}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-a}{(x-1)^2}$$

$$f_a'(x)=0 \;\rightarrow\; x^2-2x-a=0 \;\rightarrow\; x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+a}$$

Daraus folgt: x-Werte, also mögliche Stellen mit Maximum oder Minimum, existieren nur für den Bereich $a\geq-1$.

4 Untersuchen Sie die besonderen Eigenschaften der Kurve mit $a=-1$. Achten Sie dabei vor allem auf wesentliche Unterschiede zu den anderen Kurven der Schar.

$$a=-1 \;\rightarrow\; f_{-1}(x)=\frac{x^2-x}{x-1}=\frac{x\cdot(x-1)}{x-1}\overset{x\neq 1}{=}x$$

Es liegt eine Ursprungsgerade mit der Steigung 1 vor, die aber in (1/1) eine (hebbare) Lücke besitzt.

Unterschiede: Nur eine Nullstelle, keine Extremstelle, kein Pol