Thema: Kurvenschar einer Relation

Gegeben ist die Gleichung $x^4-4\cdot x^2-4\cdot y^2+a=0\ ;\ a\in\mathbb{R}$

1 Untersuchen Sie die Kurvenschar auf Schnitte mit den Koordinatenachsen, auf waagrechte und senkrechte Tangenten und auf Symmetrien.

Zeigen Sie, dass für die Schnittpunkte mit der x-Achse gilt: $x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{4-a}}$

Achsenschnitte:

x-Achse: $y=0 \rightarrow x^4-4x^2+a=0 \rightarrow x_{1,2}^2=2\pm\sqrt{4-a} \rightarrow x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{4-a}}$

y-Achse: $x=0 \rightarrow -4y^2+a=0 \rightarrow y^2=\frac{a}{4} \rightarrow y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{a}{4}}$

waagrechte Tangenten:

$$\frac{d}{dx}:\ 4x^3-8x-8y\underbrace{y'}_{=0}... $$

$$y'=0$$

$$\frac{d}{dx}:\ 4x^3-8x-8y\,y'=0 \rightarrow 4x^3-8x=0 \rightarrow 4x(x^2-2)=0 \rightarrow x_1=0\ ;\ x_2=\sqrt{2}\ ;\ x_3=-\sqrt{2}$$

dazu gehören folgende y-Werte:

$$0^4-4\cdot 0^2-4\cdot y_1^2+a=0 \rightarrow a=4\cdot y_1^2 \rightarrow y_1^2=\frac{a}{4} \rightarrow y_{1_{1,2}}=\pm\sqrt{\frac{a}{4}}$$

$$(\pm\sqrt{2})^4-4\cdot(\pm\sqrt{2})^2-4\cdot y_2^2+a=0 \rightarrow 4-4\cdot 2-4\cdot y_{2,3}^2+a=0 \rightarrow -4+a=4\cdot y_{2,3}^2 \rightarrow y_{2,3}^2=\frac{a-4}{4} \rightarrow y_{2,3}=\frac{\pm\sqrt{a-4}}{2}$$

senkrechte Tangenten:

$$x'=0$$

$$\frac{d}{dy}:4x^3x'-8x\,x'-8y=0 \rightarrow 8y=0 \rightarrow y=0 \xrightarrow{\text{siehe oben}} x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{4-a}}$$

Symmetrien:

Da nur geradzahlige Exponenten bei x und y vorkommen: Achsensymmetrie zur x-Achse und zur y-Achse und damit auch Punktsymmetrie zu (0/0).

2 Die Graphen für $a_1=-1$; $a_2=+1$; $a_3=5$ sind gegeben. Ordnen Sie (mit Begründung) diese Werte den einzelnen Graphen zu.

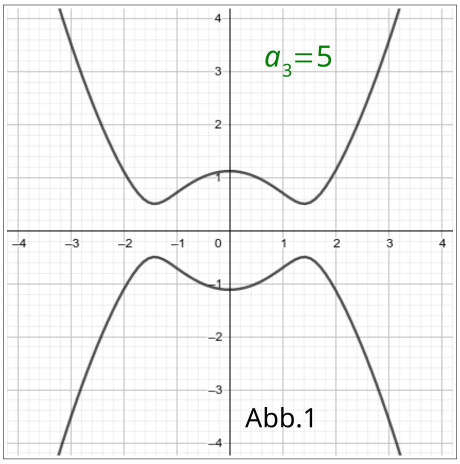

Abb.1

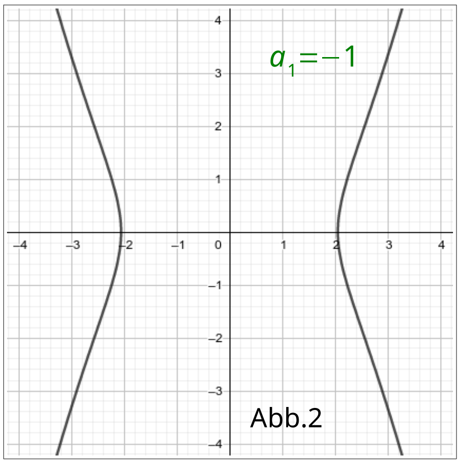

Abb.2

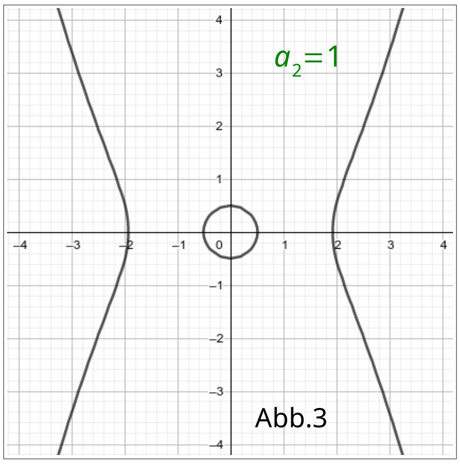

Abb.3

$a_1=-1$:

Schnitt mit der x-Achse: $x=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{4+1}}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{5}}$

Da $\sqrt{5}>2$, gibt es nur 2 Lösungen: $x_{1,2}=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$

Damit kommt nur Abbildung 2 in Frage.

$a_2=+1$:

Schnitt mit der x-Achse: $x=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{4-1}}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$

Da $\sqrt{3}<2$, gibt es hier 4 Lösungen: $x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$

Damit kommt nur Abbildung 3 in Frage.

$a_3=5$:

Schnitt mit der x-Achse: $x=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{4-5}}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{-1}}$

Es gibt keine reelle Lösung, also gibt es auch keine Nullstelle.

Damit kommt nur Abbildung 1 in Frage.

3 Teilen Sie den Definitionsbereich der a-Werte so in Intervalle auf, dass alle Kurven mit einem a aus einem Intervall gleiche Eigenschaften haben. Nennen Sie jeweils die Eigenschaften, die die Unterschiede ausmachen.

Wie unter Abschnitt 2 gesehen, gibt es 3 Fälle für Schnittpunkte mit der x-Achse:
0 Schnitte, 2 Schnitte und 4 Schnitte.

Die Grenzen dazwischen erhält man, wenn man bei $x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{4-a}}$ untersucht, für welche Werte von a der Radikand unter einer Wurzel zu 0 wird.

$$4-a=0 \;\rightarrow\; a=4 \;\rightarrow\; x^4-4\cdot x^2-4\cdot y^2+4=0 \;\rightarrow\; y^2=\frac{x^4-4\cdot x^2+4}{4}=\frac{(x^2-2)^2}{2^2} \;\rightarrow\; y_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\cdot x^2\mp 1$$

Hier ergeben sich 2 Parabeln.

$\sqrt{4-a}=2 \rightarrow 4-a=4 \rightarrow a=0 \rightarrow x^4-4\cdot x^2-4\cdot y^2+0=0 \rightarrow y^2=\frac{1}{4}\cdot x^4-x^2=x^2\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot x^2-1\right) \rightarrow$

$y_{1,2}=\pm x\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\cdot x^2-1}$ Die zugehörige Kurve besitzt einen singulären Punkt bei (0/0).

Bereichseinteilung:

$a<0 \rightarrow 2$ Lösungen ; $0<a<4 \rightarrow 4$ Lösungen ; $a>4 \rightarrow 0$ Lösungen

Beim Betrachten der Schnitte mit der y-Achse ergibt sich eine Grenze bei $a=0$ zwischen den Fällen mit 0 Lösungen und 2 Lösungen (siehe oben).

Auch Untersuchungen bei waagrechten und senkrechten Tangenten liefern keine neue Einteilung.

4 Für $a=3$ schließt die Kurve ein Flächenstück vollständig ein. Bei Rotation dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht ein Körper. Berechnen Sie dessen Volumen.

Zur Lösung wird die Formel $V=\pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx$ für das Volumen bei Rotation um die x-Achse benutzt.

Für die Schnitte mit der x-Achse gilt für $a=3$:

$x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{4-3}}=\pm\sqrt{2\pm1} \rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$; $x_{3,4}=\pm\sqrt{1}=\pm1$

Zwischen $x=-1$ und $x=+1$ befindet sich die eingeschlossene Fläche.

Man muss also die gegebene Gleichung mit $a=3$ nach y² auflösen und in die Formel einsetzen:

$x^4-4x^2-4y^2+3=0 \rightarrow 4y^2=x^4-4x^2+3 \rightarrow y^2=\frac{1}{4}x^4-x^2+\frac{3}{4}$

$$V=\pi\cdot\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1}{4}x^4-x^2+\frac{3}{4}\right)dx=\pi\cdot\left[\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}\cdot x\right]_{-1}^{+1}=\pi\cdot\left(\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{1}{20}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)\right)=$$

$$2\cdot\pi\cdot\frac{3-20+45}{60}=2\cdot\pi\cdot\frac{28}{60}=\frac{28}{30}\pi=\frac{14}{15}\pi\approx2{,}93$$