Thema: Kurve in Parameterdarstellung

Das Schaubild einer algebraischen Kurve ist in Parameterdarstellung durch

$x = \sin t$ und $y = \sin 2t$ gegeben.

1 Untersuchen Sie die Kurve auf folgende Eigenschaften: Achsenschnittpunkte, Steigung in den Achsenschnittpunkten, waagrechte und senkrechte Tangenten mit Koordinaten der betreffenden Punkte, Skizze der Kurve.

Achsenschnittpunkte:

x-Achse: $y=0 \rightarrow 0=\sin 2t \rightarrow 2t=n\cdot\pi \rightarrow t=\frac{n}{2}\cdot\pi$ mit $n\in\mathbb{N} \rightarrow t\in\{0;\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3}{2}\cdot\pi;...\} \rightarrow$

$x_1=0 \;;\; x_2=+1 \;;\; x_3=0 \;;\; x_4=-1 \;;\; ...$

y-Achse: $x=0 \rightarrow 0=\sin t \rightarrow t=n\cdot\pi$ mit $n\in\mathbb{N} \rightarrow t\in\{0;\pi;2\cdot\pi;3\cdot\pi;...\} \rightarrow$

$y_1=0 \;;\; y_2=0 \;;\; y_3=0 \;;\; ...$

Achsenschnittpunkte sind also $(0/0)$ für $t=0$; $(1/0)$ für $t=\frac{\pi}{2}$; $(-1/0)$ für $t=\frac{3}{2}\cdot\pi$.

Steigung in den Achsenschnittpunkten:

$$\frac{dx}{dt}=\cos t \;;\; \frac{dy}{dt}=2\cdot\cos 2t \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\cdot\cos(2t)}{\cos t}=\frac{2\cdot(2\cdot\cos^2(t)-1)}{\cos t}=4\cdot\cos t-\frac{2}{\cos t} \rightarrow$$

$t=0 \rightarrow (0/0)$: $\frac{dy}{dx}=4\cdot 1-\frac{2}{1}=4-2=2$, also Tangente mit Steigung +2

$t=\pi \rightarrow (0/0)$: $\frac{dy}{dx}=4\cdot(-1)-\frac{2}{(-1)}=-4+2=-2$, also Tangente mit Steigung -2

Für $t=\frac{\pi}{2}$ und $t=\frac{3}{2}\cdot\pi$ ist $\cos t=0$ (Nenner im Bruch).

Man rechnet deshalb mit $\frac{dx}{dy}=\frac{\cos t}{4\cdot\cos^2(t)-2}$:

$t=\frac{\pi}{2} \rightarrow (1/0)$ und $t=\frac{3}{2}\cdot\pi \rightarrow (-1/0)$: $\frac{dx}{dy}=\frac{0}{4\cdot 0-2}=0$, also senkrechte Tangente.

Waagrechte Tangenten: $\frac{dy}{dx}=4\cdot\cos t-\frac{2}{\cos t}=0 \rightarrow 4\cdot\cos t=\frac{2}{\cos t} \rightarrow \cos^2 t=\frac{1}{2} \rightarrow \cos t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow$

$t=\arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}+n\cdot\frac{\pi}{2}$ Dazu gehören folgende Punkte: $n=0 \rightarrow \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)/\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}/1\right)$

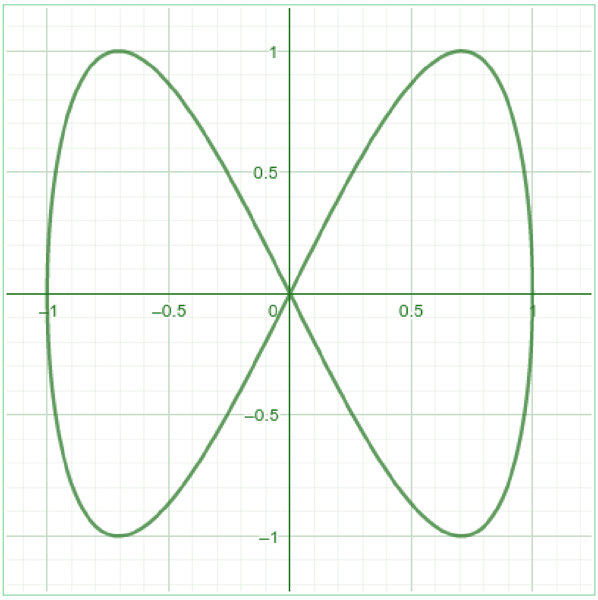
$n=1 \rightarrow \left(\sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)/\sin\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}/-1\right)$; $n=2 \rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}/1\right)$; $n=3 \rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}/-1\right)$ usw.

Senkrechte Tangenten: $\frac{dx}{dy}=\frac{\cos t}{4\cdot\cos^2(t)-2}=0 \rightarrow \cos t=0 \rightarrow t=\arccos(0)=\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi$

Dazu gehören folgende Punkte: $n=0 \rightarrow \left(\sin\frac{\pi}{2}/\sin\pi\right)=(1/0)$

$n=1 \rightarrow \left(\sin\frac{3\cdot\pi}{2}/\sin 3\cdot\pi\right)=(-1/0)$; $n=2 \rightarrow \left(\sin\frac{5\cdot\pi}{2}/\sin 5\pi\right)=(1/0)$ usw.

Graph:



2 Finden Sie eine algebraische Gleichung der Kurve in der Form $F(x,y)=0$.

Es gilt $x=\sin t$ und $y=\sin 2t=2\cdot\sin t\cdot\cos t$ Mit $\sin^2 t+\cos^2 t=1 \rightarrow \cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}$ ergibt sich $y=2\cdot\sin t\cdot\cos t=2\cdot\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}=2\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2}$ also $y=2\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2}$

3 Zeigen Sie $\int\sin^3 x\,dx=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x$.

Wegen $\int f(x)dx=F(x) \mathit{mit} F'(x)=f(x)$ lässt sich der Beweis durch Ableiten der rechten Seite der Gleichung führen:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x\right)=\frac{3\cdot\cos^2 x\cdot(-\sin x)}{3}+\sin x=-\sin x\cdot\cos^2 x+\sin x=-\sin x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)+\sin x=$$

$-\sin x+\sin^3 x+\sin x=\sin^3 x$, was zu zeigen war.

4 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der Kurve vollständig eingeschlossen wird.

Mit der Formel $A_{Sektor}=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_a^b \left(x(t)\cdot y'(t)-y(t)\cdot x'(t)\right)dt$ folgt

$x(t)=\sin t \rightarrow x'(t)=\cos t$; $y(t)=\sin 2t \rightarrow y'(t)=2\cdot\cos 2t$

Es reicht, den rechten Flächenteil zu berechnen. t läuft dabei von 0 bis π. Der verdoppelte Wert gibt dann den gesamten Flächeninhalt an.

$$A_{Sektor}=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^\pi \left(\sin(t)\cdot 2\cdot\cos(2t)-\sin(2t)\cdot\cos(t)\right)dt=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^\pi \left(\sin(t)\cdot 2\cdot(1-2\sin^2(t))-2\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)\cdot\cos(t)\right)dt=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^\pi \left(2\cdot\sin(t)-4\sin^3(t)-2\cdot\sin(t)\cdot\left(1-\sin^2(t)\right)\right)dt=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^\pi \left(2\cdot\sin(t)-4\sin^3(t)-2\cdot\sin(t)+2\cdot\sin^3(t)\right)dt=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^\pi \left(-4\sin^3(t)+2\cdot\sin^3(t)\right)dt=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^\pi \left(-2\sin^3(t)\right)dt=-1\cdot\int\limits_0^\pi \left(\sin^3(t)\right)dt\overset{siehe\,3}{=}-\left[\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x\right]_0^\pi=$$

$$-\left(\left(\frac{\cos^3\pi}{3}-\cos\pi\right)-\left(\frac{\cos^3 0}{3}-\cos 0\right)\right)=-\left(\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right)=-\left(-\frac{2}{3}+2\right)=-\frac{4}{3}$$

Da der Kurventeil im Uhrzeigersinn gezeichnet wird, ist der Flächeninhalt negativ orientiert.

Der gesamte Flächeninhalt beider Flächenteile beträgt $2\cdot\left|\frac{-4}{3}\right|=\frac{8}{3}$.