Thema: Funktionenschar mit Logarithmus-Funktion

Gegeben ist die Funktionenschar mit der Gleichung $f_t(x)=(\ln x-2t)\cdot\ln x\ ;\ t\in\mathbb{R}$

Ableitungen:

$$f_t'(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln x+(\ln x-2t)\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\cdot\ln x-\frac{2t}{x}=\frac{2}{x}\cdot(\ln x-t)$$

$$f_t''(x)=-\frac{2}{x^2}\cdot(\ln x-t)+\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{2}{x^2}\cdot\ln x+\frac{2}{x^2}\cdot t+\frac{2}{x^2}=\frac{2}{x^2}\cdot(1+t-\ln x)$$

$$f_t'''(x)=-\frac{4}{x^3}\cdot(1+t-\ln x)-\frac{2}{x^2}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{4}{x^3}-\frac{4}{x^3}\cdot t+\frac{4}{x^3}\cdot\ln x-\frac{2}{x^3}=\frac{4}{x^3}\cdot(\ln x-t-1{,}5)$$

1 Untersuchen Sie die Funktionenschar auf Definitionsbereich, Verhalten an den Definitionsgrenzen, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, waagrechte Tangenten und Wendepunkte.

Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}^+$

Verhalten an den Definitionsgrenzen:

$x\to 0\ \to\ f_t(x)\to(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty\ ;\ f_t'(x)\to\infty\cdot(-\infty)=-\infty$

$x\to+\infty\ \to\ f_t(x)\to\infty\cdot\infty=+\infty\ ;\ f_t'(x)\to 0$ wegen l'Hospital: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\cdot(\ln x-t)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{1}=0$

Achsenschnittpunkte:

y-Achse: kein Schnittpunkt (siehe Definitionsbereich)

x-Achse: $f_t(x)=0\ \to\ (\ln x-2t)\cdot\ln x=0$, also

entweder $\ln x_1-2t=0\ \to\ \ln x_1=2t\ \to\ x_1=e^{2t}$

oder $\ln x_2=0\ \to\ x_2=1$

waagrechte Tangenten:

$f_t'(x)=0\ \to\ \frac{2}{x}\cdot(\ln x-t)=0\ \to\ \frac{2}{x}\neq 0\ ;\ \ln x-t=0\ \to\ \ln x=t\ \to x=e^t$

$f_t(e^t)=(t-2t)\cdot t=t^2-2t^2=-t^2$

$f_t''(e^t)=\frac{2}{e^{2t}}\cdot(1+t-t)=\frac{2}{e^{2t}}>0\ \to$ Minimum für alle t

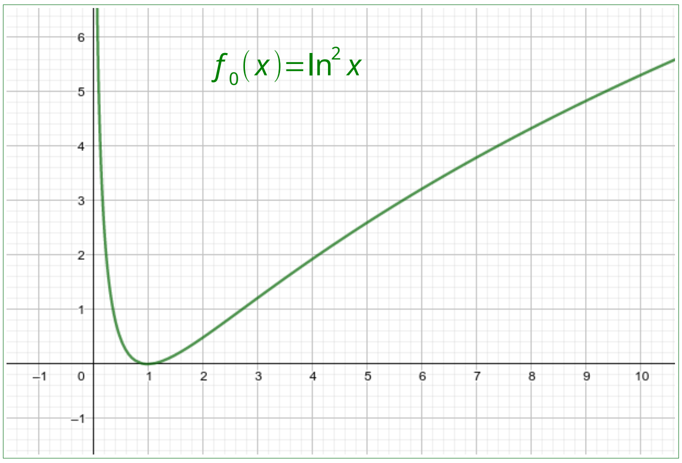
Wendepunkte:

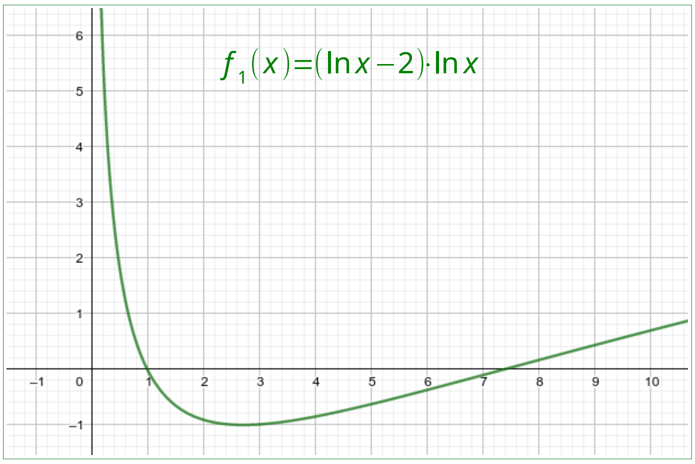
$f_t''(x)=0 \rightarrow \frac{2}{x^2}\cdot(1+t-\ln x)=0 \rightarrow \frac{2}{x^2}\neq 0 \;;\; 1+t-\ln x=0 \rightarrow \ln x=t+1 \rightarrow x=e^{t+1}$

$f_t(e^{t+1})=(t+1-2t)\cdot(t+1)=(1-t)\cdot(1+t)=1-t^2$

$f_t'''(e^{t+1})=-\frac{1}{(e^{t+1})^3}\cdot(4+4t-4\cdot(t+1)+2)=-\frac{1}{(e^{t+1})^3}\cdot 2<0$ für alle t $\rightarrow$ Wendepunkt *links*$\rightarrow$*rechts*

2 Zeichnen Sie die Schaubilder der Funktionen $f_0(x)$ und $f_1(x)$.





3 Zeigen Sie, dass die Schaubilder zweier Funktionen $f_a(x)$ und $f_b(x)$ mit $a\neq b$ sich in genau einem Punkt schneiden. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes.

$f_a(x)=f_b(x) \rightarrow (\ln x-2a)\cdot\ln x=(\ln x-2b)\cdot\ln x \rightarrow \ln^2 x-2a\cdot\ln x=\ln^2 x-2b\cdot\ln x \rightarrow$

$-2a\cdot\ln x=-2b\cdot\ln x \rightarrow \ln x\cdot(2b-2a)=0 \xrightarrow{:(2b-2a)} \ln x=0 \rightarrow x=1 \rightarrow f(1)=0$

Die Klammer kann nicht den Wert 0 haben wegen $a\neq b$.

Der Punkt (1/0) ist also gemeinsamer Schnittpunkt aller Kurvenpaare.

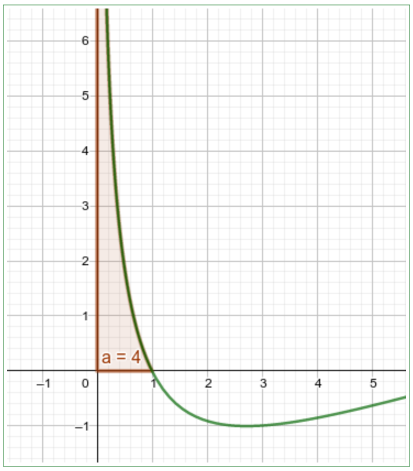
4 Die Ortskurve aller Punkte mit waagrechter Tangente entsteht durch Spiegelung des Schaubildes von $f_c(x)$ an der x-Achse. Berechnen Sie c.

Mit den Ergebnissen aus 1 gilt: $x=e^t \rightarrow t=\ln x \;;\; y=-t^2=-\ln^2 x$

$f_c(x)=(\ln x-2c)\cdot\ln x$ wird gespiegelt an der x-Achse zum Term $-\ln^2 x+2c\cdot\ln x$.

$-\ln^2 x+2c\cdot\ln x\overset{!}{=}-\ln^2 x \rightarrow 2c\cdot\ln x=0 \rightarrow c=0$

5 Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das von dem Schaubild von $f_1(x)$, der x-Achse und der y-Achse begrenzt wird, endlichen Flächeninhalt hat, indem Sie diesen Flächeninhalt berechnen.



Nullstellen von $f_1(x)=(\ln x-2)\cdot\ln x$ sind $x_1=1$ und $x_2=e^2$.

Zu berechnen ist das Integral $\int_0^1 ((\ln x-2)\cdot\ln x)\,dx$

Substitution $\ln x=z$ → $x=e^z$ → $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}$ → $dx=x\cdot dz$

$$\int_0^1 ((\ln x-2)\cdot\ln x)\,dx=\int_{-\infty}^0 (z-2)\cdot z\cdot e^z\,dz=\int_{-\infty}^0 (\underbrace{z^2-2z}_{u})\cdot\underbrace{e^z}_{v'}\,dz=$$

$$\Big[(\underbrace{z^2-2z}_{u})\cdot\underbrace{e^z}_{v}\Big]_{-\infty}^0-\int_{-\infty}^0 (\underbrace{2z-2}_{u'})\cdot\underbrace{e^z}_{v}\,dz=$$

Nebenrechnung: $\int (\underbrace{2z-2}_{u})\cdot\underbrace{e^z}_{v'}\,dz=(\underbrace{2z-2}_{u})\cdot\underbrace{e^z}_{v}-\int \underbrace{2}_{u'}\cdot\underbrace{e^z}_{v}\,dz=(2z-2)\cdot e^z-2e^z$

$$\left[(z^2-2z)\cdot e^z-(2z-2)\cdot e^z+2\cdot e^z\right]_{-\infty}^0=\left[(z^2-4z+4)\cdot e^z\right]_{-\infty}^0=4-0=4$$