Thema: Relationsschar mit Wurzelfunktionen (1989)

Gegeben ist die Gleichung $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ und $a\geq 0$.

1 Untersuchen Sie den Graph der Gleichung auf Definitionsbereich, Achsenschnitte, waagrechte Tangenten, Verhalten an den Definitionsgrenzen, jeweils in Abhängigkeit von a.

Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\{x \mid 0\leq x\leq a\}$

Achsenschnitte:

x-Achse: $y=0 \rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{a} \rightarrow x=a$

y-Achse: $x=0 \rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{a} \rightarrow y=a$

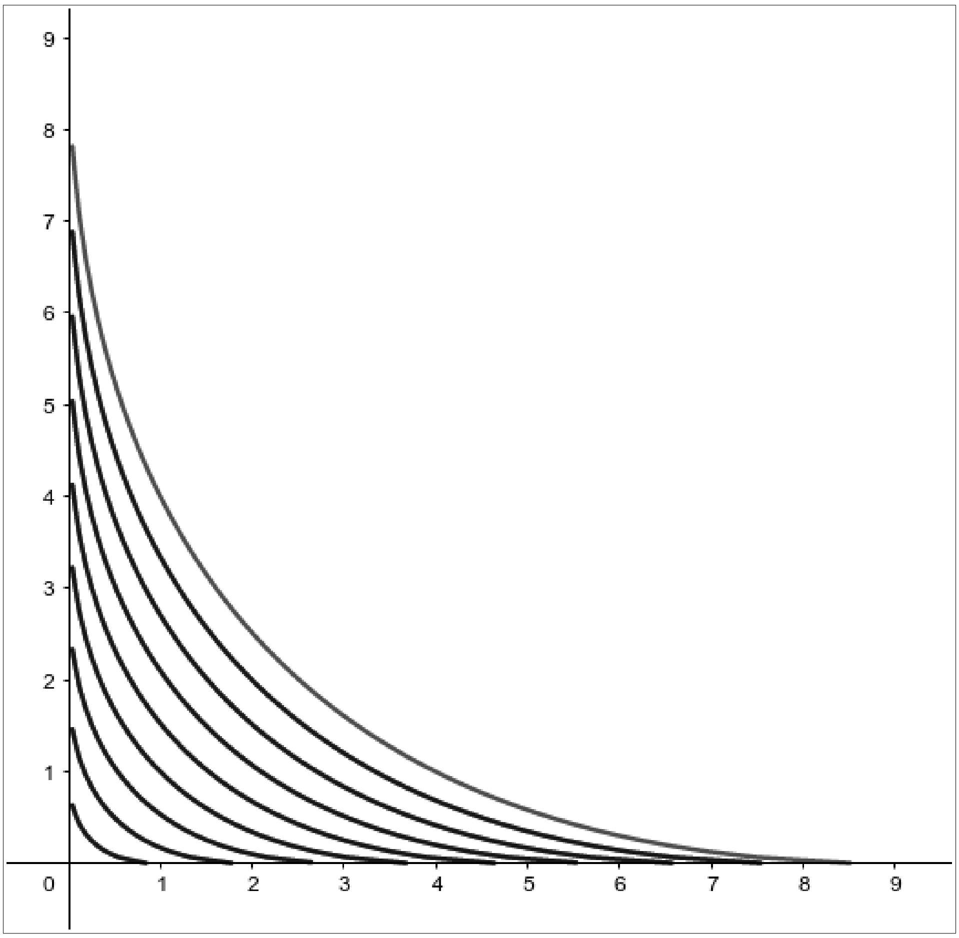
waagrechte Tangenten:

Ableitung: $\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\cdot\sqrt{y}}=0 \rightarrow y'=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot 2\cdot\sqrt{y}=-\sqrt{\frac{y}{x}}\overset{!}{=}0 \rightarrow y=0 \overset{\text{siehe oben}}{\rightarrow} x=a \rightarrow$ Punkt (a/0)

aus Symmetriegründen gibt es eine senkrechte Tangente im Punkt (0/a).
Damit ist auch das Verhalten an den Definitionsgrenzen geklärt.

2 Skizzieren Sie die Graphen für $a=0$ und $a=9$.

Die Abbildung zeigt die Graphen für a von 0 bis 9 mit der Schrittweite 1. Für a=0 ergibt sich nur der Koordinatenursprung.



3 Eine beliebige Tangente an der untersuchten Kurve schneidet die x-Achse im Punkt P und die y-Achse im Punkt Q.

Zeigen Sie, dass unabhängig vom Berührpunkt der Tangente gilt:

$\overline{OP}+\overline{OQ}=a$ (O: Koordinatenursprung)

Ableitung in Abhängigkeit von x:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x} \rightarrow y=\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 \rightarrow y'=2\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{-1}{2\cdot\sqrt{x}}=-\sqrt{\frac{a}{x}}+1$$

Mit der Tangentengleichung $t_{x_0}(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ ergibt sich

$$t_{x_0}(x)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{x_0}\right)^2+\left(1-\sqrt{\frac{a}{x_0}}\right)\cdot(x-x_0)=a-2\cdot\sqrt{a\,x_0}+x_0+x-x_0-\sqrt{\frac{a}{x_0}}\cdot x+\sqrt{a\,x_0}=a-\sqrt{a\,x_0}+x-x\cdot\sqrt{\frac{a}{x_0}}$$

Schnitt mit x-Achse:

$$t_{x_0}(x)=0=a-\sqrt{a\,x_0}+x\cdot\left(1-\sqrt{\frac{a}{x_0}}\right) \rightarrow x=\frac{\sqrt{a\,x_0}-a}{1-\sqrt{\frac{a}{x_0}}}=\frac{\sqrt{a\,x_0}\cdot\sqrt{x_0}-\sqrt{a}\cdot\sqrt{a\,x_0}}{\sqrt{x_0}-\sqrt{a}}=\sqrt{a\,x_0}=\overline{OP}$$

Schnitt mit der y-Achse:

$$x=0 \rightarrow t_{x_0}(0)=a-\sqrt{a\,x_0}=\overline{OQ}$$

Summe der Streckenlängen: $\overline{OP}+\overline{OQ}=\sqrt{a\,x_0}+a-\sqrt{a\,x_0}=a$, was zu zeigen war.