Thema: Trigonometrische und ganzrationale Funktion (1980)

Der Graph der Funktion $f(x)=\sin(\pi\cdot x)$ soll im Bereich $-1\leq x\leq +1$ durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades angenähert werden.

Ableitungen:

$f(x)=\sin(\pi\cdot x)$; $f'(x)=\pi\cdot\cos(\pi\cdot x)$; $f''(x)=-\pi^2\cdot\sin(\pi\cdot x)$; $f'''(x)=-\pi^3\cdot\cos(\pi\cdot x)$

Allgemeine Form der gesuchten Funktionsgleichungen: $f_{1,2,3}(x)=a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d$

Ableitungen: $f_{1,2,3}'(x)=3a\,x^2+2b\,x+c$; $f_{1,2,3}''(x)=6a\,x+2b$; $f_{1,2,3}'''(x)=6a$

1 Die Näherungsfunktion $f_1(x)$ soll mit der gegebenen Funktion $f(x)$ in den Nullstellen und dem Funktionswert an der Stelle $x=\frac{1}{2}$ übereinstimmen.

Geben Sie die Funktionsgleichung für $f_1(x)$ an.

Nullstellen von $f(x)$: $f(x)=\sin(\pi\cdot x)=0 \rightarrow \pi\cdot x=n\cdot x$ mit $n\in\mathbb{Z} \rightarrow x=n$

Nullstellen im Bereich $-1\leq x\leq +1$ sind also $x_{N_1}=-1$; $x_{N_2}=0$; $x_{N_3}=+1$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

Es ergibt sich mit $x_{N_1}=-1$, $x_{N_2}=0$ x_{N_3} und $f\left(\frac{1}{2}\right)$ folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{matrix} 0=-a+b-c+d \\ 0=d \\ 0=a+b+c+d \\ 1=\frac{a}{8}+\frac{b}{4}+\frac{c}{2}+d \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0=-a+b-c \\ 0=a+b+c \\ 1=\frac{a}{8}+\frac{b}{4}+\frac{c}{2} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0=2b \\ 0=a+b+c \\ 1=\frac{a}{8}+\frac{b}{4}+\frac{c}{2} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0=a+c \\ 1=\frac{a}{8}+\frac{c}{2} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0=a+c \\ 8=a+4c \end{matrix} \rightarrow 8=3c \rightarrow c=\frac{8}{3}\ ;\ a=-\frac{8}{3}$$

$$f_1(x)=-\frac{8}{3}x^3+\frac{8}{3}x$$

2 Die Näherungsfunktion $f_2(x)$ soll mit der gegebenen Funktion $f(x)$ in den Funktionswerten an den Stellen $x=-\frac{1}{2}$ und $x=+\frac{1}{2}$ übereinstimmen.

Die Graphen von $f(x)$ und $f_2(x)$ sollen außerdem bei $x=-\frac{1}{2}$ und $x=+\frac{1}{2}$ dieselbe Steigung besitzen.

Geben Sie die Funktionsgleichung für $f_2(x)$ an.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f_2\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1=\frac{a}{8}+\frac{b}{4}+\frac{c}{2}+d \qquad [1]$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f_2\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1=-\frac{a}{8}+\frac{b}{4}-\frac{c}{2}+d \qquad [2]$$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=f_2'\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0=\frac{3}{4}\cdot a+b+c \qquad [3]$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=f_2'\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \pi\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0=\frac{3}{4}\cdot a-b+c \qquad [4]$

[1] - [2] ergibt $2=\frac{a}{4}+c \rightarrow 8=a+4c \qquad [5]$

[3] + [4] ergibt $0=\frac{3}{2}\cdot a+2c \rightarrow 0=3a+4c \qquad [6]$

[6] - [5] ergibt $-8=2a \rightarrow a=-4 \rightarrow c=3 \rightarrow b=0 \rightarrow d=0$

$f_2(x)=-4x^3+3x$

3 Ein Kriterium für die Güte einer Näherungskurve könnte sein, inwieweit der Flächeninhalt der Fläche zwischen gegebener Kurve und x-Achse bzw. Näherungskurve und x-Achse in einem bestimmten Bereich übereinstimmen.
Berechnen Sie deshalb den Flächeninhalt der Flächen, die von der x-Achse und den Graphen der Funktionen $f(x)$, $f_1(x)$ und $f_2(x)$ im Bereich $-1\le x\le +1$ eingeschlossen werden.

Welche Näherungskurve ist "besser"?

Nullstellen von $f_2(x)$: $0=-4x^3+3x \rightarrow 4x^3=3x \rightarrow x_1=0 \;;\; 4x^2=3 \rightarrow x^2=\frac{3}{4} \rightarrow x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$

Berechnung der Flächeninhalte:

Mit der Substitution $\pi\cdot x=z \rightarrow \frac{dz}{dx}=\pi \rightarrow dx=\frac{1}{\pi}dz$ ergibt sich:

$$A=2\cdot\int_0^1 \sin(\pi\cdot x)\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin z\,dz=\left[\frac{2}{\pi}\cdot(-\cos z)\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}-\left(-\frac{2}{\pi}\right)=\frac{4}{\pi}$$

$$A_1=2\cdot\int_0^1\left(-\frac{8}{3}x^3+\frac{8}{3}x\right)dx=2\cdot\left[-\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{3}x^2\right]_0^1=2\cdot\left(\left(-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)-0\right)=\frac{4}{3}$$

$$A_2=\left|2\cdot\int_0^{\sqrt{\frac{3}{4}}}(-4x^3+3x)\,dx\right|+\left|2\cdot\int_{\sqrt{\frac{3}{4}}}^{0}(-4x^3+3x)\,dx\right|=\left|2\cdot\left[-x^4+\frac{3}{2}\cdot x^2\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right|+\left|2\cdot\left[-x^4+\frac{3}{2}\cdot x^2\right]_{\sqrt{\frac{3}{4}}}^{0}\right|=$$

$$\left|2\cdot\left(\left(-\frac{9}{16}+\frac{9}{8}\right)-0\right)\right|+\left|2\cdot\left(\left(-1+\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{9}{16}+\frac{9}{8}\right)\right)\right|=\frac{9}{8}+\frac{1}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

$$|A-A_1|=\left|\frac{4}{\pi}-\frac{4}{3}\right|\approx 0{,}060 \quad ; \quad |A-A_2|=\left|\frac{4}{\pi}-\frac{5}{4}\right|\approx 0{,}023$$

Zu $f_2(x)$ gehört die "bessere" Näherungskurve.

4 Die Näherungsfunktion $f_3(x)$ soll mit der gegebenen Funktion $f(x)$ in den Nullstellen und dem Flächeninhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse übereinstimmen.
Geben Sie die Funktionsgleichung für $f_3(x)$ an.

Da die Nullstellen vorgegeben sind, ergibt sich $f_3(x)=a\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+1)=a\cdot x^3-a\cdot x$.

Der a-Wert muss negativ sein, weil der Graph zwischen 0 und 1 im 1. Quadranten verlaufen muss.

$$A_3=\left|2\cdot\int_0^1 (a x^3-a x)\,dx\right|=\left|2\cdot\left[\frac{a}{4}\cdot x^4-\frac{a}{2}\cdot x^2\right]_0^1\right|=\left|2\cdot\left(\frac{a}{4}-\frac{a}{2}\right)\right|=\left|-\frac{a}{2}\right|\stackrel{!}{=}\frac{4}{\pi} \rightarrow -a=\frac{8}{\pi} \rightarrow a=-\frac{8}{\pi}$$

$$f_3(x)=-\frac{8}{3}\cdot x^3+\frac{8}{\pi}\cdot x$$