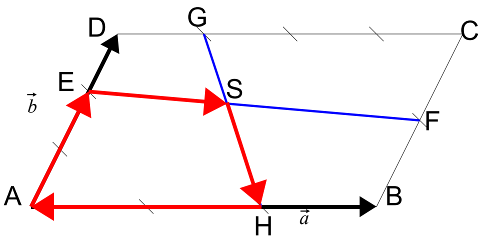
Übungsaufgaben

Berechnung von Teilverhältnissen am Parallelogramm



Im Parallelogramm ABCD sind die Seiten AD und AB in 3 gleiche Teile geteilt, die Seite BC ist halbiert und die Seite CD ist in 4 gleiche Teile geteilt (siehe Skizze).

Vektor $\vec{a}$ läuft von A nach B, Vektor $\vec{b}$ von A nach D.

Die Strecken EF und GH schneiden sich in S.

Gefragt ist, in welchem Verhältnis S die Strecken EF und GH teilt.

Geschlossener Streckenzug: AESHA

$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\cdot\vec{b}$ $\quad\overrightarrow{ES}=\lambda\cdot\overrightarrow{EF}=\lambda\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot\vec{b}+\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\vec{b}\right)$ $\quad\overrightarrow{SH}=\mu\cdot\overrightarrow{GH}=\mu\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot\vec{a}-\vec{b}+\frac{2}{3}\cdot\vec{a}\right)$ $\quad\overrightarrow{HA}=-\frac{2}{3}\cdot\vec{a}$

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ES}+\overrightarrow{SH}+\overrightarrow{HA}=\vec{0}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\vec{b}-\frac{2}{3}\cdot\lambda\cdot\vec{b}+\lambda\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\lambda\cdot\vec{b}-\frac{1}{4}\cdot\mu\cdot\vec{a}-\mu\cdot\vec{b}+\frac{2}{3}\cdot\mu\cdot\vec{a}-\frac{2}{3}\cdot\vec{a}=\vec{0}$$

$$\vec{a}\cdot\left(\lambda-\frac{1}{4}\cdot\mu+\frac{2}{3}\cdot\mu-\frac{2}{3}\right)+\vec{b}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\lambda+\frac{1}{2}\cdot\lambda-\mu\right)=\vec{0}$$

$\lambda-\frac{1}{4}\cdot\mu+\frac{2}{3}\cdot\mu-\frac{2}{3}=0 \;\rightarrow\; \lambda+\frac{5}{12}\cdot\mu=\frac{2}{3}\quad(1)$ $\qquad\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\lambda+\frac{1}{2}\cdot\lambda-\mu=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{6}\cdot\lambda+\mu=\frac{2}{3}\quad(2)$

Aus (2) folgt $\mu=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\cdot\lambda$.

Eingesetzt in (1): $\lambda+\frac{5}{12}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\cdot\lambda\right)=\frac{2}{3} \;\rightarrow\; \lambda+\frac{5}{18}-\frac{5}{72}\cdot\lambda=\frac{2}{3} \;\rightarrow\; \frac{67}{72}\cdot\lambda=\frac{7}{18} \;\rightarrow\; \lambda=\frac{7\cdot 72}{18\cdot 67}=\frac{28}{67}$

Daraus ergibt sich $\mu=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\cdot\lambda=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\cdot\frac{28}{67}=\frac{2}{3}-\frac{14}{201}=\frac{134-14}{201}=\frac{120}{201}=\frac{40}{67}$

S teilt die Strecke EF im Verhältnis 28 zu 39 und die Strecke GH im Verhältnis 27 zu 40.

Lagebeziehung von Geraden

Wie liegen die Geraden mit den Gleichungen $\vec{r}_1=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\-6\end{pmatrix}$ und $\vec{r}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-5\\-2\\12\end{pmatrix}$ zueinander?

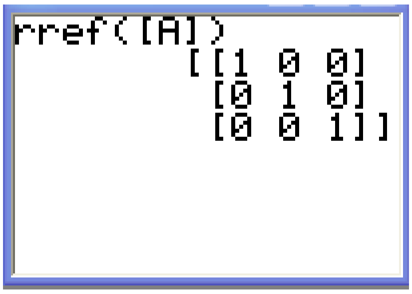
Wenn der eine Richtungsvektore ein Vielfaches vom anderen Richtungsvektor ist, liegen die Geraden parallel oder sind sogar identisch.

Ansatz: $c\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-2\\12\end{pmatrix} \;\rightarrow\; 1.\,Komponente: c=-1 \;\;;\;\; 2.\,und\;3.\,Komponente: c=-2$, also kein gemeinsames c, d. h. die Geraden sind nicht parallel.

Schneiden sich die Geraden?
Dann kann man die Gleichungen gleich setzen und erhält Lösungen für λ und μ.

$$\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-5\\-2\\12\end{pmatrix} \;\rightarrow\; \lambda\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\-6\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$$

Die zugehörige Matrix wird auf dem Taschenrechner mit dem rref-Befehl umgewandelt:



Die 3. Zeile im rechten Bild bedeutet 0=1. Es gibt also keine Lösung und die Geraden schneiden sich nicht.

Die Geraden müssen deshalb windschief sein.