

Hausaufgabe zum 2007-11-26

Seite 258 Aufgabe 7b

Skizzieren Sie die Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ und berechnen Sie den Flächeninhalt der von den Kurven vollständig eingeschlossenen Flächen.

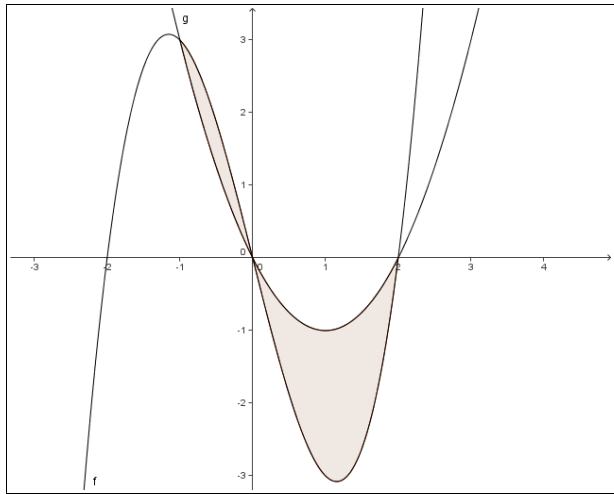
$$f(x) = x^3 - 4x \quad g(x) = x \cdot (x-2) = x^2 - 2x$$

Berechnung der Schnittpunkte der Graphen:

$$x^3 - 4x = x^2 - 2x \rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \rightarrow x \cdot (x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{4}{2} = 2 \quad ; \quad x_3 = -\frac{2}{2} = -1$$



Berechnung der Stammfunktion

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int ((x^3 - 4x) - (x^2 - 2x)) dx = \int (x^3 - 4x - x^2 + 2x) dx = \int (x^3 - x^2 - 2x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$$

Berechnung der orientierten Flächeninhalte

$$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 = (0) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{-3 - 4 + 12}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3} - 4 \right) - (0) = 4 - \frac{8}{3} - 4 = -\frac{8}{3}$$

Berechnung der Gesamtfläche

$$A = \left| \frac{5}{12} \right| + \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{5 + 32}{12} = \frac{37}{12} = 3 \frac{1}{12}$$