2007-03-21 Klassenarbeit 4 Klasse 9c Mathematik

Lösung *Version 2007-04-10*

1 Schreibe als <u>eine</u> Wurzel:

a) $\sqrt{245}-\sqrt{45}=\sqrt{49\cdot5}-\sqrt{9\cdot5}=7\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{5}=4\cdot\sqrt{5}=\sqrt{16\cdot5}=\sqrt{80}$

b) $\frac{2\cdot\sqrt{7}}{9}=\sqrt{\frac{4\cdot7}{81}}=\sqrt{\frac{28}{81}}$

c) $\sqrt{\sqrt{\frac{81}{16}}}=\sqrt{\frac{9}{4}}$ *vereinfacht ergibt sich* $\frac{3}{2}$ *, was aber nicht gefragt ist.*

---

2 Berechne den Abstand der Punkte

a) $A(-2/1)$ und $B(3/5)$

Formel: $d=\sqrt{x^2+y^2}$

$d=\sqrt{(3-(-2))^2+(5-1)^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}\approx6{,}4$ *Der Abstand beträgt* $\sqrt{41}$.

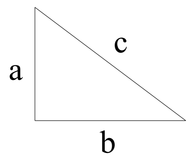
b) $P(1/1/0)$ und $Q(-2/3/1)$

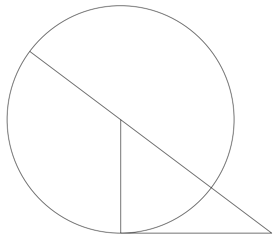
Formel: $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$d=\sqrt{(-2-1)^2+(3-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}\approx3{,}74$ *Der Abstand beträgt* $\sqrt{14}$.

---

3 Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c ist gegeben. Beweise den Satz des Pythagoras. Benutze dazu die angegebene erweiterte Hilfszeichnung und einen im Unterricht behandelten mathematischen Satz.





Auf das Dreieck bezogen heißt der Satz des Pythagoras $a^2+b^2=c^2$

Mit den Bezeichnungen in nebenstehender Figur gilt nach dem Sehnen-Tangenten-Satz:

$b^2=(c-a)\cdot(c+a)$

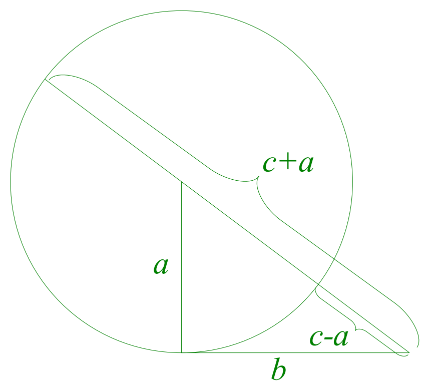
Durch Umformen erhält man:

$b^2=c^2+c\cdot a-a\cdot c-a^2=c^2-a^2$

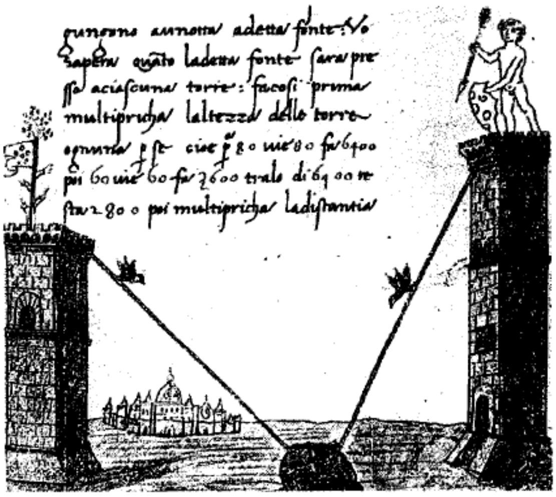
a^2 auf die linke Seite der Gleichung bringen:

$a^2+b^2=c^2$

q.e.d.



4 Im Rechenbuch des Fillipo Calandri (1491) steht folgende Aufgabe:
Der linke Turm ist 60m hoch, der rechte Turm 80m.
Der Abstand der Türme beträgt 100m.
Zwischen den Türmen ist ein See, der für beide Vögel (gerade Luftlinie von der jeweiligen Turmspitze aus) gleich weit entfernt ist.
Berechne die Strecke, die jeder Vogel zurücklegen muss, damit er den See erreicht.



Aus den Bezeichnungen in der Planfigur ergibt sich:

linkes Dreieck: $L^2=60^2+(100-x)^2$

rechtes Dreieck: $L^2=80^2+x^2$

Gleichsetzen der beiden Gleichungen und Vereinfachen:

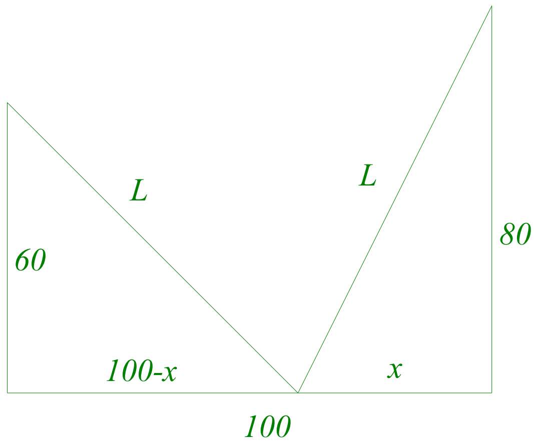
$60^2+(100-x)^2=80^2+x^2$

$3600+10000-200\cdot x+x^2=6400+x^2$

$13600-200\cdot x=6400$

$-200\cdot x=6400-13600=-7200$

$x=\frac{-7200}{-200}=36$



Einsetzen in eine der oberen Gleichungen:

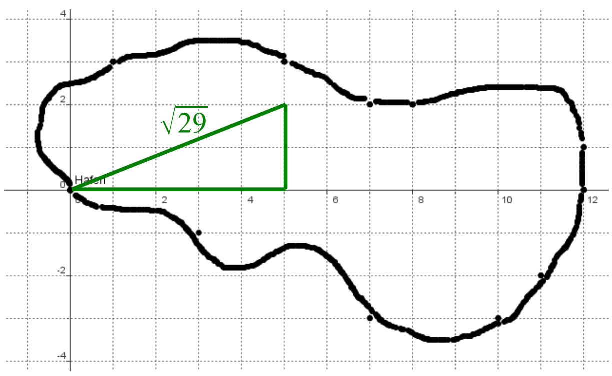
$L^2=80^2+36^2=6400+1296=7696$

$L=\sqrt{7696}\approx 87{,}7$

Jeder Vogel muss also etwa 87,7 m fliegen, um zum See zu gelangen.

---

5 Auf der Rückseite einer alte Schatzkarte steht:
„Der Hafen der Insel befindet sich im Punkt (0/0) des Koordinatensystems. Die Koordinaten des Ortes, an dem der Schatz vergraben liegt, sind ganze Zahlen. Der Schatz liegt $\sqrt{29}$ vom Hafen entfernt.“



a) Berechne die Koordinaten des Schatzes.

b) Untersuche, ob die Angaben auf der Schatzkarte eindeutig sind oder ob es mehrere mögliche Orte für den Schatz gibt. Antwort mit Begründung!

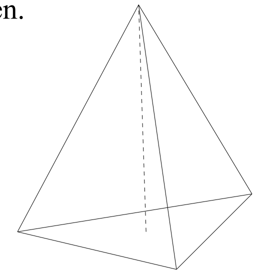
zu a):

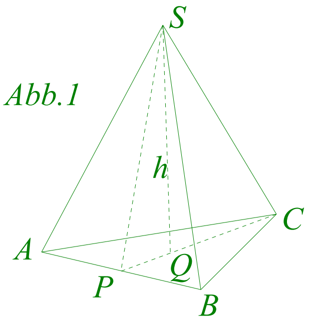
Die x- und y-Koordinaten müssen wegen des Satzes vom Pythagoras ($x^2+y^2=29$ *) betragsmäßig kleiner als 6 sein, denn* $y^2=6^2=36$ *ist zu groß, während* $y^2=5^2=25$ *noch möglich ist.*
Als (positive) Koordinaten kommen also nur in Frage 1, 2, 3, 4, 5 mit ihren Quadraten 1, 4, 9, 16, 25.
Die Summe zweier dieser Quadrate muss 29 ergeben. Das geht nur mit den Quadraten 4 und 25.

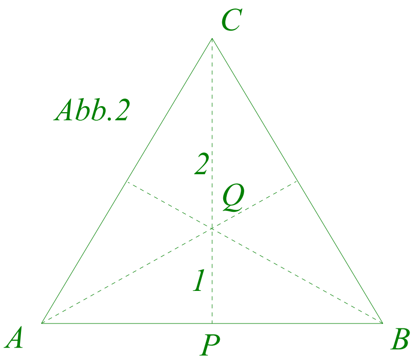
Also sind prinzipiell die Lösungen $(x/y)=(\pm 2/\pm 5)$ *und* $(x/y)=(\pm 5/\pm 2)$ *möglich.*

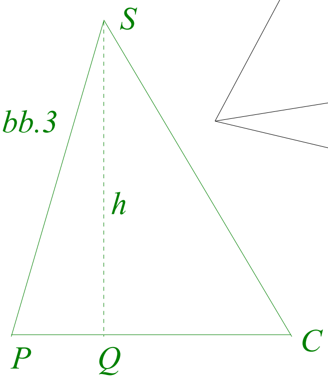
zu b): Auf Grund der eingezeichneten Abmessungen der Insel auf der Karte scheiden alle Lösungen bis auf $(x/y)=(+5/+2)$ *aus.*

6 Aus 6 Streichhölzern der Länge 4,5cm kann man ein Tetraeder (= 4-Flächner) bauen. Der Körper besitzt also 6 gleich lange Kanten.
Berechne die Höhe des Tetraeders. Die Höhe verläuft von der Spitze aus senkrecht zur Grundfläche des Tetraeders.









Mit den Bezeichnungen in den Hilfszeichnungen ergibt sich:

Q ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im Dreieck ABC.
Deshalb teilt Q die Strecke CP in Abb. 2 im Verhältnis 2:1.

Abb. 3: $h=\sqrt{CS^2-CQ^2}$

Abb. 2: $CP^2=BC^2-BP^2$ *und* $CQ=\frac{2}{3}\cdot CP$

Die Länge eines Streichholzes beträgt a = 4,5 cm.

Dann gilt: $CS = a$; $BC = a$; $BP = \frac{1}{2}\cdot a$

$$CP^2=BC^2-BP^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3}{4}\cdot a^2 \Rightarrow CP=\sqrt{\frac{3}{4}\cdot a^2}$$

$$CQ=\frac{2}{3}\cdot CP=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}\cdot a^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$h=\sqrt{CS^2-CQ^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot a$$

Mit a = 4,5 cm beträgt die Höhe der Pyramide also $h=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot 4{,}5\approx 3{,}67$

---

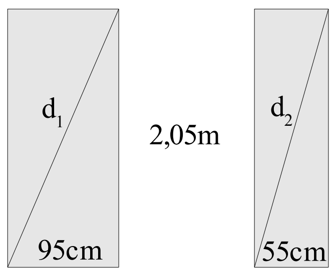
7 Hans möchte in seinem Dachzimmer einen einteiligen quaderförmigen Schrank aufstellen, der 2,05m hoch, 95cm breit und 55cm tief ist. Der Dachraum hat eine Höhe von 2,20m.
Der Schrank wird liegend durch die Tür in den Raum gebracht und soll nun aufgestellt werden.

Finde durch Rechnung mit den angegebenen Größen heraus, warum es dabei zu Schwierigkeiten kommen kann und wie Hans vorgehen muss, damit er den Schrank aufstellen kann.

Nebenstehend sind 2 Ansichten des Schranks abgebildet.
Der Schrank lässt sich nur durch Drehen aufstellen, wenn die eingezeichnete Diagonale kürzer als der Raum hoch ist.

$d_1=\sqrt{0{,}95^2+2{,}05^2}=\sqrt{5{,}105}\approx 2{,}25$ $\quad d_2=\sqrt{0{,}55^2+2{,}05^2}=\sqrt{4{,}505}\approx 2{,}12$

Man muss den Schrank also über die 55cm breite Kante kippen, damit er nicht an die Decke stößt.



8 a) Die Gerade $y=\frac{1}{2}\cdot x-3$ wird an der 1. Winkelhalbierenden gespiegelt.

Gib die Geradengleichung der Bild-Geraden an.

Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden bedeutet, dass die Variablen x und y ihre Plätze tauschen: $(x/y)\rightarrow(y/x)$

Daraus folgt die Gleichung $x=\frac{1}{2}\cdot y-3 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\cdot y=x+3 \;\Rightarrow\; y=2\cdot x+6$

b) Die Gerade $y=\frac{1}{2}\cdot x-3$ wird am Punkt (0/0) gespiegelt.

Gib die Geradengleichung der Bild-Geraden an.

Spiegelung am Punkt (0/0) bedeutet, dass statt x und y nun -x und -y gesetzt werden müssen: $(x/y)\rightarrow(-x/-y)$

Daraus folgt die Gleichung $-y=\frac{1}{2}\cdot(-x)-3 \;\Rightarrow\; y=\frac{1}{2}\cdot x+3$

c) Die Parabel $y=x^2$ wird um 5 Einheiten nach rechts und um 3 Einheiten nach unten verschoben.
Gib die Gleichung der verschobenen Parabel an.

$y=(x-5)^2-3$

VIEL ERFOLG BEI DER BEARBEITUNG DER AUFGABEN!