

Zentraler elastischer Stoß

Bei der folgenden Rechnung wird angenommen, dass sich eine punktförmige Masse m_1 mit der Geschwindigkeit v_1 auf einer Geraden auf eine ruhende punktförmige Masse m_2 zu bewegt und mit ihr zusammenstößt.

Die beiden Stoßpartner werden sich dann nach dem Stoß auf dieser Geraden mit den Geschwindigkeiten v_1' und v_2' weiter bewegen.

In der realen Welt gibt es keine punktförmigen Massen, aber Billiardkugeln und Flummis verhalten sich bei einem zentralen Stoß näherungsweise so.

Die Annahme $v_2=0$ ist nicht willkürlich: Man kann das jeweilige Bezugssystem immer so wählen, dass die Masse m_2 in Ruhe ist.

Beim Stoß gelten der Impulserhaltungssatz und der Energieerhaltungssatz:

$$\text{Impulserhaltungssatz (IS): } p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

$$\text{Energieerhaltungssatz (ES): } W_1 + W_2 = W_1' + W_2' \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2'^2$$

Die beiden Gleichungen können mit der Bedingung $v_2=0$ vereinfacht werden zu

$$\text{IS: } m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

$$\text{ES: } m_1 \cdot v_1^2 = m_1 \cdot v_1'^2 + m_2 \cdot v_2'^2$$

IS wird umgeformt zu $m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_1' = m_2 \cdot v_2' \Rightarrow m_1 \cdot (v_1 - v_1') = m_2 \cdot v_2' \Rightarrow v_2' = \frac{m_1}{m_2} \cdot (v_1 - v_1')$ und eingesetzt in ES:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1^2 &= m_1 \cdot v_1'^2 + m_2 \cdot v_2'^2 \Rightarrow m_1 \cdot (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 \cdot v_2'^2 \Rightarrow m_1 \cdot (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 \cdot \frac{m_1^2}{m_2^2} \cdot (v_1 - v_1')^2 \Rightarrow \\ m_2 \cdot (v_1^2 - v_1'^2) &= m_1 \cdot (v_1 - v_1')^2 \Rightarrow m_2 \cdot (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_1 \cdot (v_1 - v_1')^2 \Rightarrow m_2 \cdot (v_1 + v_1') = m_1 \cdot (v_1 - v_1') \Rightarrow \\ m_2 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_1' &= m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_1' \Rightarrow v_1' \cdot (m_1 + m_2) = v_1 \cdot (m_1 - m_2) \Rightarrow v_1' = v_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

$$v_2' \text{ ergibt sich damit zu } v_2' = \frac{m_1}{m_2} \cdot (v_1 - v_1') = \frac{m_1}{m_2} \cdot \left(v_1 - v_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) = v_1 \cdot \left(\frac{m_1}{m_2} \cdot \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \right) \Rightarrow$$

$$v_2' = v_1 \cdot \left(\frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \right) = v_1 \cdot \left(\frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \right) = v_1 \cdot \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2}$$

Die Geschwindigkeiten nach dem Stoß betragen also $v_1' = v_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ und $v_2' = v_1 \cdot \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2}$

Beispiele:

$$\text{a) } m_1 = 0,2 \text{ kg}; m_2 = 1,0 \text{ kg} \Rightarrow v_1' = v_1 \cdot \frac{-0,8 \text{ kg}}{1,2 \text{ kg}} = -\frac{2}{3} \cdot v_1 \Rightarrow v_2' = v_1 \cdot \frac{0,4 \text{ kg}}{1,2 \text{ kg}} = +\frac{1}{3} \cdot v_1$$

$$\text{b) } m_1 = 1,0 \text{ kg}; m_2 = 1,0 \text{ kg} \Rightarrow v_1' = v_1 \cdot \frac{0 \text{ kg}}{2,0 \text{ kg}} = 0 \cdot v_1 \Rightarrow v_2' = v_1 \cdot \frac{2,0 \text{ kg}}{2,0 \text{ kg}} = +1 \cdot v_1$$

$$\text{c) } m_1 = 5,0 \text{ kg}; m_2 = 1,0 \text{ kg} \Rightarrow v_1' = v_1 \cdot \frac{4,0 \text{ kg}}{6,0 \text{ kg}} = +\frac{2}{3} \cdot v_1 \Rightarrow v_2' = v_1 \cdot \frac{10,0 \text{ kg}}{6,0 \text{ kg}} = +\frac{5}{3} \cdot v_1$$