

Wurzelziehen „per Hand“

erst einmal am Beispiel der Wurzel $\sqrt{51327,81456}$, weiter unten dann die Theorie.

Zunächst werden unter der Wurzel vom Dezimalkomma beginnend nach links und rechts je 2 Stellen zusammengefasst und diese Zweiergruppen z.B. durch kleine Hochstriche markiert:

$$\sqrt{5'13'27,81'45'6}$$

Man beginnt nun mit der Gruppe ganz links, hier der 5, und sucht die Quadratzahl, die kleiner oder gleich dieser Zahl ist, hier also 4 wegen $2^2=4<5$. Die Wurzel dieser Quadratzahl, also die 2, ist die erste Ziffer des Ergebnisses. Die Quadratzahl 4 wird unter die 5 geschrieben und von dieser subtrahiert:

$$\begin{array}{r} \sqrt{5'13'27,81'45'6} = 2 \\ 4 \\ \hline 113 \end{array}$$

Nun folgt immer wieder derselbe Vorgang:

1. An das Subtraktionsergebnis 1 wird der nächste 2-er-Block, also die 13, angehängt.
2. Die Zahl rechts vom Gleichheitszeichen, hier die 2, wird verdoppelt und rechts von ihr denkt man sich eine Ziffer angehängt, hier durch ein ? symbolisiert, also 4?
3. Nun wählt man die Ziffer ? so, dass die Zahl links unten durch 4? dividiert kleiner oder gleich ? und dabei möglichst groß wird: $113:4?=?$. Eine Überschlagsrechnung lässt hier $?=2$ vermuten ($3 \cdot 4=12$, also zu groß). Dann wird das Fragezeichen durch die gefundene Zahl ersetzt, die Multiplikation $4? \cdot ?$ ausgeführt, also $42 \cdot 2=84$, die gefundene Ziffer 2 an das Teilergebnis angehängt und die 84 von der 113 subtrahiert:

$$\begin{array}{r} \sqrt{5'13'27,81'45'6} = 22 \\ 4 \\ \hline 113 \\ 84 \\ \hline 29 \end{array}$$

Nun folgt wieder 1.: 2927,

dann 2.: 44? (wegen $2 \cdot 22=44$)

dann 3.: 2927:44?=? Überschlag: 292:44 etwa 7 Probe: $447 \cdot 7=3129$ zu groß

also vielleicht 6 Probe: $446 \cdot 6=2676 < 2927$ o.k.

$$\begin{array}{r} \sqrt{5'13'27,81'45'6} = 226 \\ 4 \\ \hline 113 \\ 84 \\ \hline 2927 \\ 2676 \\ \hline 251 \end{array}$$

Hinter die 226 schreibt man das Dezimalkomma, weil das Komma jetzt auch unter der Wurzel an der Reihe ist.

Nun folgt wieder 1.: 25181,

dann 2.: 452? (wegen $2 \cdot 226=452$)

dann 3.: 25181:452?=? Überschlag 2518:452 etwa 6 Probe: $4526 \cdot 6=27156$ zu groß

also vielleicht 5 Probe: $4525 \cdot 5=22625$ o.k.

$$\sqrt{5'13'27,81'45'6} = 226,5$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \underline{113} \\ 84 \\ \underline{2927} \\ 2676 \\ \underline{25181} \\ 22625 \\ \underline{2556} \end{array}$$

Nun folgt wieder 1.: 255645 ,

dann 2.: 4530? (wegen $2 \cdot 2265 = 4530$)

dann 3.: 255645:4530=?

Überschlag 25564:4530 etwa 6 Probe: $45306 \cdot 6 = 271836$ zu groß
also vielleicht 5 Probe: $45305 \cdot 5 = 226525$ o.k.

$$\sqrt{5'13'27,81'45'6} = 226,55$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \underline{113} \\ 84 \\ \underline{2927} \\ 2676 \\ \underline{25181} \\ 22625 \\ \underline{255645} \\ 226525 \\ \underline{29120} \end{array}$$

Nun folgt wieder 1.: 2912060 (da keine Stellen mehr da sind, wird nun jeweils mit 2 Nullen aufgefüllt; hier nur eine, weil noch die 6 da war),

dann 2.: 45310? (wegen $2 \cdot 22655 = 45310$)

dann 3.: 2912060:45310=?

Überschlag 291206:45310 etwa 7 Probe: $453107 \cdot 7 = 3171749$ zu groß
also vielleicht 6 Probe: $453106 \cdot 6 = 2718636$ o.k.

$$\sqrt{5'13'27,81'45'6} = 226,556$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \underline{113} \\ 84 \\ \underline{2927} \\ 2676 \\ \underline{25181} \\ 22625 \\ \underline{255645} \\ 226525 \\ \underline{2912060} \\ 2718636 \\ \underline{193424} \end{array}$$

usw. usw.

Der Taschenrechner liefert: $\sqrt{51327,81456} = 226,5564269$

Warum funktioniert das Berechnen nun so wie gezeigt?

Nehmen wir hier als Zahlenbeispiel $\sqrt{729}$. Das Ergebnis wird 2-stellig sein und damit in der Form $10 \cdot a + b$ geschrieben werden können.

Damit ist $729 = (10 \cdot a + b)^2 = 100 \cdot a^2 + 20 \cdot a \cdot b + b^2 = 100 \cdot a^2 + (20 \cdot a + b) \cdot b$

In den 700 müssen also die $100 \cdot a^2$ enthalten sein, d.h. in 7 muss a^2 enthalten sein.

Es passt $a=2$ wegen $a^2=4$ ($a=3$ ist zu groß wegen $3^2=9$).

Die 10-er-Ziffer ist also gefunden und heißt 2.

Im Rest: $729 - 400 = 329$ muss also $(20 \cdot a + b) \cdot b$ enthalten sein oder weil wir a schon kennen:

$329 >= (20 \cdot 2 + b) \cdot b = (40 + b) \cdot b$ oder symbolisch als Ziffern geschrieben: $4b \cdot b$

Nun muss man probieren: Überschlagsrechnung: $329 : 4b$ oder $32 : 4 = 8$

Probe: $(40 + 8) \cdot 8 = 48 \cdot 8 = 384$, das ist aber größer als 329.

Deshalb mit $b=7$ probieren:

Probe: $(40 + 7) \cdot 7 = 47 \cdot 7 = 329$ passt, also ist die Einer-Ziffer 7 und das Ergebnis lautet

$\sqrt{729} = 27$.

Notfalls muss man mehrfach die geratene Ziffer um 1 vermindern und neu rechnen :-)

Hat man eine zu kleine Ziffer geraten, merkt man es daran, dass beim nächsten Rechenschritt b einen Wert über 10 annehmen müsste (notfalls kann man mit entsprechendem Übertrag in schon vorhandene Stellen so weiter rechnen).

Das Teilergebnis wird immer als a interpretiert, deshalb muss man es wegen $20 \cdot a$ mit 2 multiplizieren. (Nur mit 2 und nicht mit 20, weil durch das Anhängen der Ziffer b ja automatisch der Wert mit 10 multipliziert wird)

Für das Wurzelziehen aus größeren Zahlen gilt:

Die beiden Teilergebnisse subtrahiert man von der Zahl unter der Wurzel und hat damit Folgendes erreicht:

1. Der erste Teil des Ergebnisses steht stellenrichtig hinter dem Gleichheitszeichen,
2. Der verbleibende Rest kann nun auf dieselbe Art behandelt werden, wobei der erste Schritt (Suche nach a und Abziehen von a^2) schon erledigt ist, weil das alte $(10 \cdot a + b)$ als neues a interpretiert wird.

Nachteil des Rechenverfahrens: Die Größe der Zahlen, mit denen man rechnen muss, wächst mit der Stellenzahl des Ergebnisses an (anders als beim „ähnlichen“ Rechenverfahren für das schriftliche Dividieren).

Vorteil des Rechenverfahrens: Alle Ziffern des schrittweise berechneten Ergebnisses sind exakt.