Wurzelziehen „per Hand“

erst einmal am Beispiel der Wurzel $\sqrt{51327{,}81456}$, weiter unten dann die Theorie.

Zunächst werden unter der Wurzel vom Dezimalkomma beginnend nach links und rechts je 2 Stellen zusammengefasst und diese Zweiergruppen z.B. durch kleine Hochstriche markiert:

$\sqrt{5'13'27{,}81'45'6}$

Man beginnt nun mit der Gruppe ganz links, hier der 5, und sucht die Quadratzahl, die kleiner oder gleich dieser Zahl ist, hier also 4 wegen $2^2=4<5$. Die Wurzel dieser Quadratzahl, also die 2, ist die erste Ziffer des Ergebnisses. Die Quadratzahl 4 wird unter die 5 geschrieben und von dieser subtrahiert:

$$\begin{array}{l} \sqrt{5'13'27{,}81'45'6} = 2 \\ \underline{4} \\ 113 \end{array}$$

Nun folgt immer wieder derselbe Vorgang:

1. An das Subtraktionsergebnis 1 wird der nächste 2-er-Block, also die 13, angehängt.

2. Die Zahl rechts vom Gleichheitszeichen, hier die 2, wird verdoppelt und rechts von ihr denkt man sich eine Ziffer angehängt, hier durch ein ? symbolisiert, also 4?

3. Nun wählt man die Ziffer ? so, dass die Zahl links unten durch 4? dividiert kleiner oder gleich ? und dabei möglichst groß wird: 113:4?=? . Eine Überschlagsrechnung lässt hier ?=2 vermuten ($3\cdot4=12$, also zu groß). Dann wird das Fragezeichen durch die gefundene Zahl ersetzte, die Multiplikation 4?·? ausgeführt, also $42\cdot2=84$, die gefundene Ziffer 2 an das Teilergebnis angehängt und die 84 von der 113 subtrahiert:

$$\begin{array}{l} \sqrt{5'13'27{,}81'45'6} = 22 \\ \underline{4} \\ 113 \\ \underline{84} \\ \;\;29 \end{array}$$

Nun folgt wieder 1.: 2927,

dann 2.: 44? (wegen $2\cdot22=44$)

dann 3.: 2927:44?=? Überschlag: 292:44 etwa 7 Probe: $447\cdot7=3129$ zu groß
also vielleicht 6 Probe: $446\cdot6=2676 < 2927$ o.k.

$$\begin{array}{l} \sqrt{5'13'27{,}81'45'6} = 226 \\ \underline{4} \\ 113 \\ \underline{84} \\ \;\;2927 \\ \;\;\underline{2676} \\ \;\;251 \end{array}$$

Hinter die 226 schreibt man das Dezimalkomma, weil das Komma jetzt auch unter der Wurzel an der Reihe ist.

Nun folgt wieder 1.: 25181 ,
dann 2.: 452? (wegen $2\cdot226=452$)
dann 3.: 25181:452?=? Überschlag 2518:452 etwa 6 Probe: $4526\cdot6=27156$ zu groß
also vielleicht 5 Probe: $4525\cdot5=22625$ o.k.

$\sqrt{5'13'27{,}81'45'6} = 226{,}5$
4
113
84
2927
2676
25181
22625
2556

Nun folgt wieder 1.: 255645 ,
dann 2.: 4530? (wegen 2·2265=4530)
dann 3.: 255645:4530?=?
Überschlag 25564:4530 etwa 6 Probe: 45306·6=271836 zu groß
also vielleicht 5 Probe: 45305·5=226525 o.k.

$\sqrt{5'13'27{,}81'45'6} = 226{,}55$
4
113
84
2927
2676
25181
22625
255645
226525
29120

Nun folgt wieder 1.: 2912060 (da keine Stellen mehr da sind, wird nun jeweils mit 2 Nullen aufgefüllt; hier nur eine, weil noch die 6 da war),
dann 2.: 45310? (wegen 2·22655=45310)
dann 3.: 2912060:45310?=?
Überschlag 291206:45310 etwa 7 Probe: 453107·7=3171749 zu groß
also vielleicht 6 Probe: 453106·6=2718636 o.k.

$\sqrt{5'13'27{,}81'45'6} = 226{,}556$
4
113
84
2927
2676
25181
22625
255645
226525
2912060
2718636
193424

usw. usw.

Der Taschenrechner liefert: $\sqrt{51327{,}81456}$ =226,5564269

Warum funktioniert das Berechnen nun so wie gezeigt?

Nehmen wir hier als Zahlenbeispiel $\sqrt{729}$. Das Ergebnis wird 2-stellig sein und damit in der Form $10 \cdot a+b$ geschrieben werden können.
Damit ist $729=(10 \cdot a+b)^2=100 \cdot a^2+20 \cdot a \cdot b+b^2=100 \cdot a^2+(20 \cdot a+b) \cdot b$
In den 700 müssen also die $100 \cdot a^2$ enthalten sein, d.h. in 7 muss a^2 enthalten sein.
Es passt $a=2$ wegen $a^2=4$ ($a=3$ ist zu groß wegen $3^2=9$).
Die 10-er-Ziffer ist also gefunden und heißt 2.
Im Rest: $729-400=329$ muss also $(20 \cdot a+b) \cdot b$ enthalten sein oder weil wir a schon kennen:
$329>=(20 \cdot 2+b) \cdot b=(40+b) \cdot b$ oder symbolisch als Ziffern geschrieben: $4b \cdot b$
Nun muss man probieren: Überschlagsrechnung: 329:4b oder 32:4=8
Probe: $(40+8) \cdot 8=48 \cdot 8=384$, das ist aber größer als 329.
Deshalb mit $b=7$ probieren:
Probe: $(40+7) \cdot 7=47 \cdot 7=329$ passt, also ist die Einer-Ziffer 7 und das Ergebnis lautet
$\sqrt{729}=27$.

Notfalls muss man mehrfach die geratene Ziffer um 1 vermindern und neu rechnen :-(
Hat man eine zu kleine Ziffer geraten, merkt man es daran, dass beim nächsten Rechenschritt b einen Wert über 10 annehmen müsste (notfalls kann man mit entsprechendem Übertrag in schon vorhandene Stellen so weiter rechnen).

Das Teilergebnis wird immer als a interpretiert, deshalb muss man es wegen $20 \cdot a$ mit 2 multiplizieren. (Nur mit 2 und nicht mit 20, weil durch das Anhängen der Ziffer b ja automatisch der Wert mit 10 multipliziert wird)

Für das Wurzelziehen aus größeren Zahlen gilt:
Die beiden Teilergebnisse subtrahiert man von der Zahl unter der Wurzel und hat damit Folgendes erreicht:
1. Der erste Teil des Ergebnisses steht stellenrichtig hinter dem Gleichheitszeichen,
2. Der verbiebene Rest kann nun auf dieselbe Art behandelt werden, wobei der erste Schritt (Suche nach a und Abziehen von a^2) schon erledigt ist, weil das alte $(10 \cdot a+b)$ als neues a interpretiert wird.

Nachteil des Rechenverfahrens: Die Größe der Zahlen, mit denen man rechnen muss, wächst mit der Stellenzahl des Ergebnisses an (anders als beim „ähnlichen“ Rechenverfahren für das schriftliche Dividieren).
Vorteil des Rechenverfahrens: Alle Ziffern des schrittweise berechneten Ergebnisses sind exakt.