Lösen einer Gleichung 4. Grades

Diese Aufgabe ist lösbar! Lodovico Ferrari (1522-1565) hat dazu eine Lösungsformel entwickelt (s.u.). Aber trotz seines Namens kommt man damit eher im Schneckentempo ans Ziel.

Trotzdem sollte man sich nicht davon abhalten lassen, mal „per Hand“ eine Gleichung 4.Grades zu lösen. Erstens ist es ein tolles Gefühl, wenn man es geschafft hat und zweitens kann es uns hochtechnisierten Menschen nicht schaden, wenn wir in Ehrfurcht sehen, was die (zugegeben besten) Mathematiker vor 400 bis 500 Jahren mit dem eigenen Kopf geleistet haben.

Da im Lauf der Rechnung ggf. auch eine Gleichung 3.Grades gelöst werden muss, sollte man vor dem Weiterlesen erst einmal den Artikel „Lösen einer Gleichung 3.Grades“ durcharbeiten!
Auch zu komplexen Zahlen, die als Zwischen-Lösung und im Ergebnis auftauchen könnten, findet sich da ein kurzer Abschnitt.

Und jetzt springen wir ins kalte Wasser:

Jede Gleichung 4.Grades kann man in der Form $x^4 + a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$ mit $a, b, c, d \in \Re$ schreiben. Falls vor dem ersten Summanden nicht der Faktor 1 steht, dividiert man eben durch diese Zahl und erhält dann die angegebene Form.

Nun substituiert man: $x = z - \frac{a}{4}$: $$\left(z - \frac{a}{4}\right)^4 + a \cdot \left(z - \frac{a}{4}\right)^3 + b \cdot \left(z - \frac{a}{4}\right)^2 + c \cdot \left(z - \frac{a}{4}\right) + d = 0$$

Löst man die Klammern auf und fasst nach Potenzen von z zusammen (für die erste Klammer braucht man die Formel $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$, für die zweite Klammer die Formel $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ und für die dritte Klammer die 2.binomische Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$), so ergibt sich

$$z^4 + \left(b - \frac{3}{8} \cdot a^2\right) \cdot z^2 + \left(\frac{1}{8} \cdot a^3 - \frac{1}{2} \cdot ab + c\right) \cdot z + \left(-\frac{3}{256} \cdot a^4 + \frac{1}{16} \cdot a^2b - \frac{1}{4} \cdot ac + d\right) = 0$$ oder

$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ mit $p = b - \frac{3}{8}a^2$, $q = \frac{1}{8} \cdot a^3 - \frac{1}{2} \cdot ab + c$ und $r = -\frac{3}{256} \cdot a^4 + \frac{1}{16} \cdot a^2b - \frac{1}{4} \cdot ac + d$.

Der Fall $p = 0$ und $q = 0$ führt auf die triviale Gleichung $z^4 + r = 0$.

Für $p \neq 0$ und $q = 0$ erhält man die biquadratische Gleichung $z^4 + p \cdot z^2 + r = 0$, die mit der Substitution $v = z^2$ zur quadratischen Gleichung $v^2 + p \cdot v + r = 0$ wird, welche man mit Hilfe der bekannten „p-q-Formel“ löst.

Bleibt also der Fall $p \neq 0$ und $q \neq 0$.

Man versucht nun, $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ auf die Form $\left(z^2 + P\right)^2 - \left(Qz + R\right)^2 = 0$ zu bringen.
Dass das immer geht, zeigen wir, indem wir diese neu Form ausmultiplizieren und dann nach Potenzen von z zusammenfassen:

$$z^4 + 2Pz^2 + P^2 - Q^2z^2 - 2QRz - R^2 = 0$$

$$z^4 + \left(2P - Q^2\right) \cdot z^2 + \left(-2QR\right) \cdot z + \left(P^2 - R^2\right) = 0$$

d.h. $p = 2P - Q^2$, $q = -2QR$ und $r = P^2 - R^2$.

Die Gleichung $\left(z^2+P\right)^2-\left(Qz+R\right)^2=0$ hat sicher dann eine Lösung, wenn $z^2+P=Qz+R$ oder wenn $z^2+P=-Qz-R$ (diese Gleichungen werden zum Schluss wieder benötigt).
Zunächst muss man jetzt aber *P*, *Q* und *R* aus *p*,*q*,und *r* bestimmen.

Dazu formen wir die Gleichungen $p=2P-Q^2$, $q=-2QR$ und $r=P^2-R^2$ so weit um, dass nur noch die Variable *P* in Abhängigkeit von *p*,*q* und *r* vorkommt:

$$q=-2QR\Rightarrow R=-\frac{q}{2Q}$$

Einsetzen: $r=P^2-R^2\Rightarrow R^2=P^2-r=\frac{q^2}{4Q^2}\Rightarrow\frac{4Q^2}{q^2}=\frac{1}{P^2-r}\Rightarrow Q^2=\frac{q^2}{4P^2-4r}$

Einsetzen: $p=2P-Q^2=2P-\frac{q^2}{4P^2-4r}\Rightarrow 4P^2p-4pr=8P^3-8P\cdot r-q^2\Rightarrow$

$$8P^3-4pP^2-8rP+4pr-q^2=0\Rightarrow P^3-\frac{1}{2}pP^2-rP+\frac{1}{2}pr-\frac{1}{8}q^2=0 .$$

Diese Gleichung 3.Grades mit der Variablen *P* muss nun gelöst werden. Wie man das macht, ist unter der Überschrift „Lösen einer Gleichung 3.Grades“ zu finden ;-)

-- *P A U S E* --

Aus $p=2P-Q^2$, $q=-2QR$ und $r=P^2-R^2$ folgen die Gleichungen

$R^2=P^2-r$, $Q^2=2P-p$ und $QR=-\frac{q}{2}$.
Man wählt nun aus den gefundenen Lösungen für *P* eine aus, berechnet mit den beiden ersten Gleichungen *R* und *Q* und prüft, ob die dritte Gleichung mit diesen Werten erfüllt ist. Wenn nicht, muss man eine andere Lösung von *P* benutzen.

Diese Werte für *P*, *Q* und *R* setzt man nun in die Gleichungen $z^2+P=Qz+R$ und $z^2+P=-Qz-R$ (s.o) ein, löst die sich ergebenden quadratischen Gleichungen mit der Variable z und erhält die 4 Lösungen der reduzierten Form.

Unter Beachtung von $x=z-\frac{a}{4}$ ergeben sich dann die Lösungen der ursprünglichen Gleichung.
Fertig!

Beispiel[1]:

Finde die Lösungen der Gleichung $x^4-x^3+2x^2-4x-8=0$.

Die Substitution $x=z-\frac{-1}{4}=z+\frac{1}{4}$ ergibt $z^4+\frac{13}{8}z^2-\frac{25}{8}z-\frac{2275}{256}=0$.

Damit gilt $p=\frac{13}{8}$; $q=-\frac{25}{8}$; $r=-\frac{2275}{256}$.

Die Gleichung $P^3-\frac{1}{2}pP^2-rP+\frac{1}{2}pr-\frac{1}{8}q^2=0$ liefert mit diesen Werten die Lösungen

$P_1=\frac{15}{16}$; $P_2=-\frac{1}{16}+3i$; $P_3=-\frac{1}{16}-3i$

---

[1]*Geständnis: Nach mehreren Anläufen wegen einiger Flüchtigkeitsfehler habe ich dann doch zum Überprüfen der Rechnungen und zur Lösung der Gleichung 3.Grades auf den elektronischen Freund und Helfer zurückgegriffen...*

Mit der Lösung P_1 ergeben sich $R^2 = P^2 - r = \frac{225}{256} - \left(-\frac{2275}{256}\right) = \frac{2500}{256} \Rightarrow R_{1,2} = \pm\frac{50}{16} = \pm\frac{25}{8}$
und $Q^2 = 2P - p = 2\cdot\frac{15}{16} - \frac{13}{8} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow Q_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$.

Wählt man $R = +\frac{25}{8}$ und $Q = +\frac{1}{2}$ so ist mit $q = -\frac{25}{8}$ die Gleichung $QR = -\frac{q}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{8} = -\frac{-\frac{25}{8}}{2}$ erfüllt.

Einsetzen in die Gleichungen:

$$z^2 + P = Qz + R \Rightarrow z^2 + \frac{15}{16} = \frac{1}{2}z + \frac{25}{8} \Rightarrow z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{35}{16} = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{35}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{6}{4} \Rightarrow$$

$$z_1 = \frac{1}{4} + \frac{6}{4} = \frac{7}{4} \quad ; \quad z_2 = \frac{1}{4} - \frac{6}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$z^2 + P = -Qz - R \Rightarrow z^2 + \frac{15}{16} = -\frac{1}{2}z - \frac{25}{8} \Rightarrow z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{65}{16} = 0 \Rightarrow z_{3,4} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{65}{16}} = -\frac{1}{4} \pm 2i \Rightarrow$$

$$z_3 = -\frac{1}{4} + 2i \quad ; \quad z_4 = -\frac{1}{4} - 2i$$

Mit $a = -1$ und Resubstitution $x = z - \frac{a}{4} = z - \frac{-1}{4} = z + \frac{1}{4}$ ergeben sich die Lösungen

$$x_1 = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 2 \quad ; \quad x_2 = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4} = -1 \quad ; \quad x_3 = -\frac{1}{4} + 2i + \frac{1}{4} = 2i \quad ; \quad x_4 = -\frac{1}{4} - 2i + \frac{1}{4} = -2i$$