Lösen einer Gleichung 3. Grades

Wer sich auf dieses Abenteuer einlassen will, braucht einige Kenntnisse über komplexe Zahlen.
Es reicht aber, wenn man folgende Sachverhalte kennt und „kochrezeptartig“ (man nehme...) anwenden kann:

> Es gibt eine Zahl *i*, die nicht im Bereich der reellen Zahlen liegt, sondern die die Einheit einer anderen Zahlenart (imaginäre Zahlen) ist. Definition: $i^2 = -1$. Daraus folgt z.B.: $\sqrt{-1} = i$.
> Man rechnet mit *i* wie mit einer Formvariablen, schleppt das *i* also durch die ganze Rechnung mit. Es sei denn, es ergibt sich eine Vereinfachung dadurch, dass das *i* quadriert wird. Dann kommt -1 heraus.
> Beispiele: $3+4i-2+6i = 1+10i$ oder
> $(2-3i)(1+5i) = 2\cdot 1+2\cdot 5i-3i\cdot 1-3i\cdot 5i = 2+10i-3i-15i^2 = 2+7i-15\cdot(-1) = 2+7i+15 = 17+7i$
>
> Zahlen, die sich in dieser Art aus einer reellen Zahl und einer imaginären Zahl zusammensetzen, nennt man komplexe Zahlen. Man trägt sie graphisch als Punkte in einer Ebene auf, bei der das Koordinatensystem auf der x-Achse die reellen Zahlen und auf der y-Achse die komplexen Zahlen enthält.
> Es gilt, dass jede 3.Wurzel einer komplexen Zahl drei Werte hat, einen reellen Wert x_1 und zwei weitere Werte, die sich aus x_1 durch Multiplikation mit $-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cdot\sqrt{3}$ bzw. $-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\cdot\sqrt{3}$ ergeben.
> Bitte ausprobieren: $\left(x_1\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cdot\sqrt{3}\right)\right)^3 = x_1^{\,3}$!
>
> Auf Grund der Darstellung der komplexen Zahlen im Koordiantensystem kann man zeigen, dass sich jede komplexe Zahl durch Polarkoordinaten ausdrücken lässt:
> $a+bi = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ mit $r=\sqrt{a^2+b^2}$ und $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
> Nach dem Satz von Moivre gilt:
> $\sqrt[3]{a+bi} = \sqrt[3]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}+n\cdot 120^0\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{3}+n\cdot 120^0\right)\right)$ mit $n\in\{0,1,2\}$

Nun aber los:

Jede Gleichung 3.Grades kann man in der Form $x^3+a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ mit $a,b,c\in\Re$ schreiben.
Falls vor dem ersten Summanden nicht der Faktor 1 steht, dividiert man eben durch diese Zahl und erhält dann die angegebene Form.

Nun substituiert man: $x = z-\frac{a}{3}$: $\left(z-\frac{a}{3}\right)^3 + a\cdot\left(z-\frac{a}{3}\right)^2 + b\cdot\left(z-\frac{a}{3}\right)+c=0$

Löst man die Klammern auf und fasst nach Potenzen von z zusammen (für die erste Klammer braucht man die Formel $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, für die zweite Klammer die 2.binomische Formel $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$), so ergibt sich

$z^3+\left(b-\frac{1}{3}\cdot a^2\right)\cdot z+\left(\frac{2}{27}\cdot a^3-\frac{1}{3}\cdot ab+c\right)=0$ oder

$z^3+pz+q=0$ mit $p=b-\frac{1}{3}a^2$ und $q=\frac{2}{27}\cdot a^3-\frac{1}{3}\cdot ab+c$.
Die Fälle $p=0$ und $q=0$ sind trivial und werden nicht weiter behandelt.

Nun substituiert man noch einmal: $z = u + v$.

Daraus folgt $(u+v)^3 + p \cdot (u+v) + q = 0$.

Ausklammern: $u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0$

Zusammenfassen: $u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u+v) = 0$ (Durch Ausmultiplizieren beweisen!)

Ist nun $u^3 + v^3 + q = 0$ und gleichzeitig $3uv + p = 0$, dann ist $z = u + v$ eine Lösung der Gleichung.

Die folgenden Schritte werden für die Variablen u und v identisch durchgeführt. Deshalb wird hier nur die Rechnung für u gezeigt:

Aus $3uv + p = 0$ ergibt sich $v = -\frac{p}{3u}$. Einsetzen liefert $u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0$.

Umformen: $u^6 - \frac{p^3}{27} + q \cdot u^3 = u^6 + q \cdot u^3 - \frac{p^3}{27} = k^2 + q \cdot k - \frac{p^3}{27} = 0$ mit $k = u^3$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergibt $k_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ und damit

$$u_{1,2} = \sqrt[3]{k} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \; .$$

Die Auflösung nach v ergibt analog $v_{1,2} = \sqrt[3]{k} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

Die Probe in $u^3 + v^3 + q = 0$ zeigt, dass die Vorzeichen bei u und v unter der Wurzel verschieden sein müssen. Also wählen wir:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \; .$$

Damit erhalten wir die Lösung für z, die man auch Cardanische Formel nennt:

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

(Übrigens: Geronimo Cardano (1501-1576) war nicht der Finder der Formel, sondern diese stammt von Niccolo Tartaglia (um 1500-1557))

Neben den reellen Lösungen für $u=u_1$ und $v=v_1$ gibt es noch (wie oben gezeigt) jeweils die beiden komplexen Lösungen

$$u_{2,3} = u_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \cdot \sqrt{3}\right) \quad \text{und} \quad v_{2,3} = v_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \cdot \sqrt{3}\right) \; .$$

Da sich z aus der Summe eines u- und eines v-Wertes zusammensetzt, würde es bei 3 u- und bei 3 v-Werten insgesamt 9 z-Werte geben.

Da aber die Nebenbedingung $3uv + p = 0$ erfüllt sein muss, gibt es nur die 3 Lösungen

$z_1 = u_1 + v_1$, $z_2 = u_2 + v_3$ und $z_3 = u_3 + v_2$ (wegen $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \cdot \sqrt{3}\right) = 1$).

Beispiel:

$x^3+3x^2-5x-92=0$, d.h. $a=3$, $b=-5$, $c=-92$

$p=b-\frac{1}{3}a^2=-5-\frac{1}{3}\cdot 9=-5-3=-8$ und

$$q=\frac{2}{27}\cdot a^3-\frac{1}{3}\cdot ab+c=\frac{2}{27}\cdot 27-\frac{1}{3}\cdot 3\cdot(-5)-92=2+5-92=-85$$

$$z_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{\frac{85}{2}+\sqrt{\frac{7225}{4}-\frac{512}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{85}{2}-\sqrt{\frac{7225}{4}-\frac{512}{27}}}=$$

$\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{129}}{6}\right)+\left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{129}}{6}\right)=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=5$ Reelle Lösung: $x_1=z_1-\frac{a}{3}=5-\frac{3}{3}=4$

Mit $u_1=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{129}}{6}$ gilt $u_{2,3}=\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{129}}{6}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}\cdot\sqrt{3}\right)$

und mit $v_1=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{129}}{6}$ gilt $v_{2,3}=\left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{129}}{6}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}\cdot\sqrt{3}\right)$

Also: $z_2=u_2+v_3=\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{129}}{6}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cdot\sqrt{3}\right)+\left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{129}}{6}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\cdot\sqrt{3}\right)=$

$$-\frac{5}{4}+\frac{5\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot i-\frac{\sqrt{129}}{12}+\frac{\sqrt{43}}{4}\cdot i-\frac{5}{4}-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot i+\frac{\sqrt{129}}{12}+\frac{\sqrt{43}}{4}\cdot i=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{43}}{2}\cdot i$$

daraus folgt: $x_2=z_2-\frac{a}{3}=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{43}}{2}\cdot i-\frac{3}{3}=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{43}}{2}\cdot i-1=-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{43}}{2}\cdot i$

und $z_3=u_3+v_2=\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{129}}{6}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\cdot\sqrt{3}\right)+\left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{129}}{6}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cdot\sqrt{3}\right)=$

$$-\frac{5}{4}-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot i-\frac{\sqrt{129}}{12}-\frac{\sqrt{43}}{4}\cdot i-\frac{5}{4}+\frac{5\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot i+\frac{\sqrt{129}}{12}-\frac{\sqrt{43}}{4}\cdot i=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{43}}{2}\cdot i$$

daraus folgt: $x_3=z_3-\frac{a}{3}=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{43}}{2}\cdot i-\frac{3}{3}=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{43}}{2}\cdot i-1=-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{43}}{2}\cdot i$

Hat man eine Lösung ermittelt, kann man auch mit Hilfe von Polynomdivision aus der Gleichung 3.Grades eine Gleichung 2.Grades ermitteln und dann mit der bekannten Formel für quadratische Gleichungen die restlichen Lösungen finden. Hier:

$$
\begin{array}{l}
(x^3+3x^2-5x-92):(x-4)=x^2+7x+23 \\
\underline{x^3-4x^2} \\
\quad 7x^2-5x-92 \\
\quad \underline{7x^2-28x} \\
\qquad 23x-92 \\
\qquad \underline{23x-92} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$x_{2,3}=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-23}=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-\frac{92}{4}}=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{-\frac{43}{4}}$$

Wegen der negativen Diskriminante gibt es also nur <u>eine</u> reelle Lösung.

Man kann zeigen, dass es immer nur <u>eine</u> reelle Lösung gibt, wenn man die Cardanische Formel anwenden kann.

Nicht anzuwenden ist sie im sogenannten „casus irreducibilis“, bei dem die Zahl unter der 2.Wurzel bei der Cardanischen Formel negativ ist. Man muss dann 3.Wurzeln aus komplexen Zahlen ziehen. Vieta gelang es um 1600, diesen Fall zu lösen. Überraschenderweise ergeben sich dabei immer drei reellwertige Lösungen.

Herleitung der Formel:

Ist $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, dann ist mit Sicherheit p<0 und $-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}>0$.

Also gilt

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(-1)\cdot\left(-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\cdot\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}$$

Es kann geschrieben werden (s.o.) $-\frac{q}{2}+i\cdot\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ mit $r=\sqrt{\frac{-p^3}{27}}$ und

$\cos\varphi=-\frac{q}{2}:\sqrt{\frac{-p^3}{27}}$ und $\sin\varphi=\sqrt{\frac{-p^3}{27}-\frac{q^2}{4}}:\sqrt{\frac{-p^3}{27}}$

Nach dem Moivreschen Satz ergeben sich für u und v:

$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\cdot\sin\frac{\varphi}{3}\right)$, $v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{3}-i\cdot\sin\frac{\varphi}{3}\right)$

und damit $z_1=u+v=\sqrt[3]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\cdot\sin\frac{\varphi}{3}\right)+\sqrt[3]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{3}-i\cdot\sin\frac{\varphi}{3}\right)=2\cdot\sqrt[3]{r}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}$

Nach Moivre ergeben sich aber noch zwei weitere reelle Lösungen:

$z_2 = 2 \cdot \sqrt[3]{r} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^0\right)$ und $z_3 = 2 \cdot \sqrt[3]{r} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^0\right)$.

Die Lösungen für x_1, x_2, x_3 erhält man nun mittels $x = z - \frac{a}{3}$.

Beispiel:

$x^3 - 7x + 6 = 0$ Die Gleichung liegt schon in reduzierter Form vor, so dass p=-7 und q=6.

Es ist $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{36}{4} + \frac{-343}{27} = 9 + \frac{-343}{27} = \frac{243 - 343}{27} < 0$, also liegt der casus irreducibilis vor.

$r = \sqrt{\frac{-p^3}{27}} = \sqrt{\frac{343}{27}}$ und $\cos\varphi = -\frac{q}{2} : \sqrt{\frac{-p^3}{27}} = -\frac{6}{2} : \sqrt{\frac{343}{27}} = -3 \cdot \sqrt{\frac{27}{343}} = -\frac{9}{7} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}}$, d.h. $\varphi \approx 147{,}3^0$

Als Lösungen ergeben sich

$$x_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{r} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) = 2 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\frac{343}{27}}} \cdot \cos\left(\frac{147{,}3^0}{3}\right) = 2$$

$$x_2 = 2 \cdot \sqrt[3]{r} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^0\right) = 2 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\frac{343}{27}}} \cdot \cos\left(\frac{147{,}3^0}{3} + 120^0\right) = -3$$

$$x_3 = 2 \cdot \sqrt[3]{r} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^0\right) = 2 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\frac{343}{27}}} \cdot \cos\left(\frac{147{,}3^0}{3} + 240^0\right) = 1$$