Die Neuner-Probe und die Elfer-Probe

Diese beiden Proberechnungen sind aus der Mode gekommen, weil Computer und damit auch Registrierkassen bei einfachen Rechnungen keine Fehler machen (na ja, in der Regel jedenfalls nicht...).

Worum geht es bei diesen Proben?

Ein Beispiel:

Ist folgende Rechnung korrekt? 5213497 + 683719 = 5897115
Sicher nicht, denn wenn man etwas Übung hat, sieht man sofort, dass im Ergebnis hinten eine 6 stehen muss (wegen ...7 + ...9 = ...6)

Aber wie sieht es mit 5213497 + 683719 = 5897116 aus?

Bei der Neuner-Probe bildet man von den einzelnen Zahlen die Quersummen und davon wieder die Quersummen, bis die Ergebnisse einstellig sind.

Also:	5213497:	5+2+1+3+4+9+7=31	3+1=4		(1)
	683718:	6+8+3+7+1+9=34	3+4=7		(2)
	5897116:	5+8+9+7+1+1+6=37	3+7=10	1+0=1	(3)

Nun setzt man statt der gegebenen Zahlen die so gefundenen „9-er-Reste“ in die Rechnung ein und erkennt: 4 + 7 = 11 und dann 1 + 1 = 2 stimmt nicht mit der 1 aus Gleichung (3) überein. Das Ergebnis ist also falsch.

Richtig berechnet ergibt die Summe 5897216. Die mehrfach gebildete Quersumme liefert
5+8+9+7+2+1+6=38 ; 3+8=11 ; 1+1=2

Allgemein gilt:

Definition: Der Neuner-Rest einer Zahl ergibt sich, indem man die Quersumme der Zahl bildet. Ist das Ergebnis mehrstellig, wird davon wieder die Quersumme gebildet. Der Prozess setzt sich fort, bis das Ergebnis 1-stellig ist.

Satz: Führt man bei Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen die Rechnung statt mit den gegebenen Zahlen mit ihren 9-er-Resten durch, so ist die Rechnung falsch, wenn die Rechnung mit den 9-er-Resten falsch ist.

Anmerkungen:

1. Leider gilt nicht die Umkehrung des Satzes: Wenn die 9-er-Probe stimmt, kann die Rechnung durchaus falsch sein, z.b. weil zwei Ziffern im Ergebnis vertauscht wurden (die Quersumme bleibt dann nämlich gleich). Generell gilt, wenn sich eine Zahl von der richtigen Zahl um ein Vielfaches von 9 unterscheidet, findet die 9-er-Probe nicht den Fehler.

2. Ergibt sich bei der Subtraktion der 9-er-Reste eine negative Zahl, muss so oft 9 addiert werden, bis die Zahl positiv wird.

Beispiele mit richtigen Ergebnissen:

Addition:
gegeben: 4672 + 4853 =9525
Quersummen: 19 ; 20 ; 21 bzw. 10 ; 2 ; 3 bzw. 1 ; 2 ; 3
Rechnung mit 9-er-Resten: 1 + 2 = 3

Subtraktion:
gegeben 7132 - 3759 = 3373
Quersummen: 13 ; 24 ; 16 bzw. 4 ; 6 ; 7
Rechnung mit 9-er-Resten: 4 - 6 = -2 , d.h. -2 + 9 = 7

Multiplikation:
gegeben $2345 \cdot 4385 = 10282825$
Quersummen: 14 ; 20 ; 28 bzw. 5 ; 2 ; 10 bzw. 5 ; 2 ; 1
Rechnung mit 9-er-Resten: $5 \cdot 2 = 10$ bzw. 1+0=1

Auch *Divisionen* kann man überprüfen, indem man die Rechnung umdreht und so zu einer Multiplikation macht (also statt a : b = c betrachtet man $c \cdot b = a$).

Analog kann man Rechnungen mit der 11-er-Probe überprüfen. Dazu muss man nur die „alternierende Quersumme“ bilden und damit die 11-er-Reste bestimmen.

Die „alternierende Quersumme“ bildet man, indem man, bei der 1-er-Stelle beginnend nach höheren Stellen fortschreitend, immer abwechselnd eine Ziffer addiert bzw. subtahiert.

Beispiel:

+ (2 + 9 + 4 + 2 + 5) = (22)

582346912 für die alternierende Quersumme ergibt sich 22 - 18 = 4

- (- 1 - 6 - 3 - 8) = (-18)

Definition: Der Elfer-Rest einer Zahl ergibt sich, indem man die alternierende Quersumme der Zahl bildet. Ist das Ergebnis mehrstellig, wird davon wieder die alternierende Quersumme gebildet. Der Prozess setzt sich fort, bis das Ergebnis 1-stellig ist. Ergibt sich ein negatives Ergebnis, wird so oft 11 addiert, bis das Ergebnis positiv ist.

Satz: Führt man bei Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen die Rechnung statt mit den gegebenen Zahlen mit ihren 11-er-Resten durch, so ist die Rechnung falsch, wenn die Rechnung mit den 11-er-Resten falsch ist.

Anmerkungen:

1. Leider gilt auch hier nicht die Umkehrung des Satzes: Wenn die 11-er-Probe stimmt, kann die Rechnung durchaus falsch sein. Wenn sich z.B. eine Zahl von der richtigen Zahl um ein Vielfaches von 11 unterscheidet, findet die 11-er-Probe nicht den Fehler.

2. Ergibt sich bei der Subtraktion der 11-er-Reste eine negative Zahl, muss so oft 11 addiert werden, bis die Zahl positiv wird.

3. Führt man bei einer Rechnung die 9-er-Probe und die 11-er-Probe aus und stimmt die Probe, so kann es höchstens sein, dass sich das Ergebnis vom wahren Ergebnis um ein Vielfaches von 99 unterscheidet.

Beispiele mit richtigen Ergebnissen:

Addition:
gegeben: 4672 + 4853 =9525
alternierende Quersummen: 8-11= -3 bzw. 8 ; 11-9=2 ; 10-11= -1 bzw. 10
Rechnung mit 11-er-Resten: 8 + 2 = 10

Subtraktion:
gegeben 7132 - 3759 = 3373
alternierende Quersummen: 3-10= -7 bzw. 4 ; 16-8=8 ; 6-10= -4 bzw. 7
Rechnung mit 11-er-Resten: 4 - 8 = -4 bzw. 7

Multiplikation:
gegeben $2345 \cdot 4385 = 10282825$
alternierende Quersummen: 8-6=2 ; 8-12= -4 bzw. 7 ; 21-7=14, d.h. 4-1=3
Rechnung mit 11-er-Resten: $2 \cdot 7 = 14$ bzw. 4-1=3

Auch *Divisionen* kann man überprüfen, indem man die Rechnung umdreht und so zu einer Multiplikation macht (also statt $a : b = c$ betrachtet man $c \cdot b = a$).

Und warum geht das so?

Die Sache hängt mit den Teilbarkeitsregeln für 9 und 11 zusammen.

Satz:
Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Quersumme der Zahl durch 9 teilbar ist.

Folgerung:
Dann ist natürlich auch die Quersumme der Quersumme der Zahl durch 9 teilbar (usw.)

Beweis:
Bei jeder 10-er-Potenz bleibt bei Division durch 9 ein Rest von 1, denn jede 10-er-Potenz vermindert um 1 besteht aus lauter Neunen. Beispiel: 100000 = 99999 + 1.

Für Vielfache einer 10-er-Potenz gilt, dass beim Teilen durch 9 dieses Vielfache als Rest bleibt.
Beispiel: $4000 = 4 \cdot 1000 = 4 \cdot (999 + 1) = 4 \cdot 999 + 4 \cdot 1 = 4 \cdot 999 + 4$
Der erste Summand ist durch 9 teilbar, der letzte Summand bleibt als Rest.

Will man den Rest bestimmen, der bei der Division einer mehrstelligen Zahl durch 9 bleibt, muss man einfach die Vielfachen der 10-er-Potenzen addieren:
$4826 : 9 = 4 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 = 4 \cdot 999 + 4 + 8 \cdot 99 + 8 + 2 \cdot 9 + 2 + 6 =$
$(4 \cdot 999 + 8 \cdot 99 + 2 \cdot 9) + 4 + 8 + 2 + 6$
Die Klammer ist durch 9 teilbar, es bleibt der Rest 4 + 8 + 2 + 6 = 20 , die Quersumme der Zahl.

Satz:
Für Summen, Differenzen und Produkte gilt: Die Summe, die Differenz bzw. das Produkt der 9-er-Reste der Operanden ist gleich dem 9-er-Rest des Ergebnisses.

Beweis:
Es wird ausgenutzt, dass man von einer Zahl die Vielfachen von 9 abspalten kann, z.B.
$47 = 45 + 2 = 5 \cdot 9 + 2$. Der Rest beim Teilen durch 9 ist in diesem Beispiel 2.

Addition:
$x + y = (n \cdot 9 + a) + (m \cdot 9 + b) = (n + m) \cdot 9 + (a + b)$
Die Summanden haben die Reste a und b und die Summe hat den Rest a + b.

Subtraktion:
$x - y = (n \cdot 9 + a) - (m \cdot 9 + b) = (n - m) \cdot 9 + (a - b)$
Die Operanden haben die Reste a und b und die Differenz hat den Rest a - b.

Multiplikation:
$x \cdot y = (n \cdot 9 + a) \cdot (m \cdot 9 + b) = (n \cdot m \cdot 81 + n \cdot b \cdot 9 + a \cdot m \cdot 9) + (a \cdot b)$
Die Faktoren haben die Reste a und b und das Produkt hat den Rest $a \cdot b$.

Und was hat es mit der alternierenden Quersumme bei der Teilbarkeit durch 11 auf sich?

1
100=99+1
10000=9999+1
1000000=999999+1
d.h. beim Teilen durch 11 bleibt der Rest 1

10=11-1
1000=990+11-1
100000=99990+11-1
10000000=9999990+11-1
d.h. beim Teilen durch 11 bleibt der Rest -1.

Somit bleibt bei geraden 10-er-Potenzen beim Teilen durch 11 ein Rest von 1 und bei ungeraden 10-er-Potenzen ein Rest von -1.

Der Rest der Überlegungen läuft analog zum 9-er-Rest.