Stochastik

Kleiner Wiederholungskurs

1 Zufall (MatheNetz Seite 82)

Oft kann man das Ergebnis einer Tätigkeit nicht vorhersehen. Man sagt dann: „Der Zufall bestimmt das Ergebnis“

Beispiele für zufällige Ereignisse: Würfeln; Münze werfen; mit der Bleistiftspitze irgendwo auf einen Buchstaben in der Zeitung zielen; Lottoergebnis; nachschauen, wie viel Personen am Samstag um 11 Uhr an der Supermarktkasse stehen; ... (suche weitere Beispiele!)

Beispiele für Ereignisse, die nicht (nur) vom Zufall bestimmt sind: Nachschauen, ob auf der Titelseite der Tageszeitung ein Bild vorhanden ist; einen Schüler fragen, ob er jünger als 30 ist; die Streichhölzer in einer neuen Packung zählen; nachschauen, wie viel Personen nachts um 2 Uhr an der Supermarktkasse stehen; ... (suche weitere Beispiele!)

2 Wahrscheinlichkeit (MatheNetz Seite 83)

Macht man eine Vorhersage (man sagt dazu „Prognose“) zu einem Zufallsexperiment (z.B. zum Würfeln), so gibt man dabei oft eine „Wahrscheinlichkeit“, kurz mit p bezeichnet, an.
Die Werte für die Wahrscheinlichkeit eines Zufallsversuches schwanken
zwischen p=0, d.h. das Ergebnis wird auf keinen Fall eintreten (z.B. das Würfeln einer 0 beim 6-er-Würfel) und
zwischen p=1, d.h. das Ergebnis tritt auf jeden Fall ein (z.B. das Würfeln einer der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6).
Addiert man die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Einzel-Ergebnisse eines Zufallsversuchs, so ergibt sich 1.
Wahrscheinlichkeiten legt man meistens auf Grund von Versuchen oder von mathematischen Berechnungen fest.

3 Absolute Häufigkeit H (MatheNetz Seite 89)

Mit absoluter Häufigkeit H bezeichnet man die Anzahl der Versuche, bei denen sich ein ganz bestimmtes Ergebnis gezeigt hat (z.B.: wie oft hat sich beim 100-maligen Würfeln die 6 ergeben).

4 Relative Häufigkeit h (MatheNetz Seite 89)

Hat man einen Versuch N mal durchgeführt und dabei H mal ein bestimmtes Ergebnis erhalten, nennt man die Zahl h=H/N relative Häufigkeit. Man gibt damit also an, wie oft dieses Ergebnis in Abhängigkeit von der Anzahl der Versuche aufgetreten ist.
Habe ich z.B. 15 mal eine 6 gewürfelt und insgesamt 20 mal den Würfel geworfen, habe ich die 6 mit der relativen Häufigkeit h=15/20=3/4=0,75 gewürfelt. Das ist relativ viel.
Habe ich dagegen 15 mal eine 6 gewürfelt und insgesamt 300 mal gewürfelt, so habe ich die 6 mit der relativen Häufigkeit h=15/300=1/20=0,05 gewürfelt. Das ist relativ wenig.
Oft gibt man relative Häufigkeiten auch in Prozent an, statt 0,75 schreibt man dann 75% und statt 0,05 schreibt man 5%.
Will man eine Wahrscheinlichkeit auf Grund eines Zufallsversuchs festlegen, versucht man die relative Häufigkeit eines Zufallsversuchs möglichst gut vorherzusagen. Beträgt z.B. die relative

Häufigkeit eines Ergebnisses 89,3%=0,893 könnte man als Wahrscheinlichkeit p=0,9 angeben. Man muss aber damit rechnen, dass weitere Zufallsversuche möglicherweise ganz andere relative Häufigkeiten ergeben.
Beispiel:
Claudia behauptet, ein Würfel sei gefälscht, weil er viel mehr 6-en als andere Zahlen ergeben würde. Als Begründung zeigt sie ihre Wertetabelle vor, die sie beim 60-maligen Würfeln erstellt hat:

gewürfelte Zahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl der jeweiligen Zahl	8	11	8	9	9	15

Die relative Häufigkeit für die 6 ist h=15/60=1/4. Claudia legt deswegen die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Würfel bei den nächsten Versuchen eine 6 zeigt, auf p=1/4 fest.
Das Ergebnis der nächsten 60 Würfe zeigt die folgende Tabelle:

gewürfelte Zahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl der jeweiligen Zahl	10	10	9	9	10	12

Zwar kommt jetzt die 6 immer noch am häufigsten vor, aber die relative Häufigkeit h=12/60=1/5 weicht von der gewählten Wahrscheinlichkeit p=1/4 ab. Da die Werte ziemlich ähnlich sind, ist überhaupt die Frage zu stellen, ob der Würfel wirklich falsch ist oder man die Wahrscheinlichkeit nicht lieber auf p=1/6 festlegen sollte (siehe nächster Punkt).

5 Laplace-Versuche (MatheNetz Seite 94)

Sind alle Ergebnisse eines Zufallsversuchs gleich häufig zu erwarten, so spricht man von einem Laplace-Versuch.
`http://www.tu-bs.de/institute/geophysik/geschichte/laplace.htm`
Hat der Versuch n verschiedene Ergebnisse, so ist die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses dabei p=1/n, also z.B. beim Würfeln: Es gibt 6 Zahlen. Jede Zahl wird mit der Wahrscheinlichkeit p=1/6 geworfen (da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss). Fasst man mehrere Ergebnisse zu einem **Ereignis** zusammen, so berechnet man die Wahrscheinlichkeit durch

$$p(\text{Ereignis})=\frac{\text{Anzahl der } \textit{günstigen} \text{ Ergebnisse}}{\text{Anzahl } \textit{aller} \text{ Ergebnisse}}$$

Beispiele:
1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine 1 oder eine 6 zu würfeln?
   Da es zwei „gute“ Ergebnisse und 6 Möglichkeiten insgesamt gibt, gilt
   p(1 oder 6) = 2/6 = 1/3
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Skatspiel ein rotes Bild zu erhalten (Bilder sind die Bube-, Dame- und Königkarten)?
   p(rotes Bild) = 6/32 = 3/16, da es insgesamt 6 rote Bilder und 32 Karten insgesamt gibt.
3. In einer Urne sind 12 weiße, 17 schwarze Kugeln und 11 rote Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen, wenn man <u>eine</u> Kugel aus der Urne nehmen darf?
   p(rote Kugel) = 11/40, da es 11 rote Kugeln und 40 Kugeln insgesamt gibt.

6 Gegenereignis (MatheNetz Seite 94)

Manchmal ist es günstig, wenn man statt der Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis das für das Gegenereignis ermittelt. Das Gegenereignis besteht aus all den Ergebnissen, die nicht zum

Ereignis gehören. Damit ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis und das Gegenereignis genau 1:
p(Ereignis) + p(Gegenereignis) = 1
Damit gilt dann aber auch: p(Ereignis) = 1 - p(Gegenereignis)
Beispiel:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich beim Würfeln mit 3 Würfeln eine Augensumme ergibt, die kleiner als 17 ist?
Bei 3 Würfeln gibt es insgesamt $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ Möglichkeiten.
Es wäre sehr viel Arbeit, wollte man alle Möglichkeiten herausfinden, bei denen sich eine Augensumme kleiner als 17 ergibt. Statt dessen überlegt man sich, wie viele Fälle es gibt, bei denen die Summe 17 oder 18 herauskommt (das ist nämlich das Gegenereignis).
Es sind folgende Fälle: 6-6-6 , 5-6-6 , 6-5-6 , 6-6-5 , also 4 Fälle. Daraus folgt:
p(Gegenereignis) = p(Augensumme ist 17 oder 18) = 4/216 = 1/54
Und daraus folgt: p(Ereignis) = p(Augensumme ist kleiner als 17) = 1 - 1/54 = 53/54

7 **Simulation** (MatheNetz Seite 99)

Kann man einen Zufallsversuch nicht in Wirklichkeit durchführen, muss man ihn simulieren. Das geht z.B. mit einem Würfel oder auch mit einer **Zufallszahlentabelle**:
Zunächst legt man fest, was die Zahlen der Tabelle bedeuten sollen.
Beispiel:

1. Soll ein Münzwurf simuliert werden (na ja, man könnte sicher viel besser die Münze selbst werfen;-) , wäre es möglich jede gerade Zahl (0,2,4,6,8) als „Kopf“ und jede ungerade Zahl (1,3,5,7,9) als „Zahl“ zu nehmen. Genau so gut könnte man aber auch die Zahlen von 0 bis 4 als „Kopf“ und die Zahlen von 5 bis 9 als „Zahl“ nehmen. Man muss sich nur <u>vor</u> Beginn des Versuchs festlegen.
2. Man hat festgestellt, dass auf 48 neu geborene Jungen 52 neu geborene Mädchen kommen. Zur Simulation der Geburten in einer Klinik nimmt man nun immer zwei Zufallsziffern zusammen und nimmt eine sich dabei ergebende Zahl zwischen 00 und 47 als Jungengeburt und eine Zahl zwischen 48 und 99 als Mädchengeburt.

	A	B	C	D	E
1		P			P
2					
3	P		D		
4				P	
5		P			

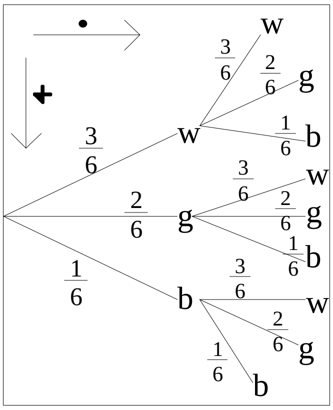
Beispiel einer Simulation: Der Dieb (D) geht immer zufällig nach rechts, oben, links oder rechts.
5 Polizisten (P) warten, um den Dieb gefangen zu nehmen.
In der Zufallszahlentabelle bedeuten
0 oder 1 : nach rechts
2 oder 3 : nach oben
4 oder 5 : nach links
6 oder 7 : nach unten
Eine 8 oder 9 wird einfach nicht beachtet und man geht zur nächsten Zahl weiter.

1. Versuch (Zufallszahlen sind 73451943527482345132453234332223 45433):
   7>unten>C4   3>oben>C3   4>links>B3   5>links>A3 gefangen
2. Versuch (Zufallszahlen sind 19624353422135475836656325464563 24143):
   1>rechts>D3   9 wird übergangen 6>unten>D4   gefangen
3. Versuch (Zufallszahlen sind 03523745763432145645745634645543 78754):
   0>rechts>D3   3>oben>D2   5>links>C2   2>oben>C1   3>oben>frei

8 Pfadregeln

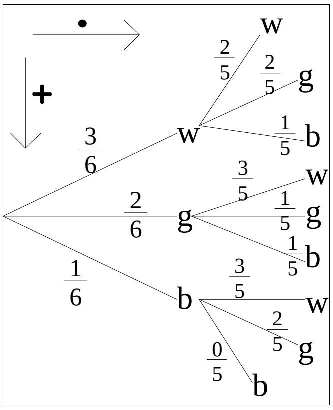
Ergibt sich das Ergebnis eines Zufallsversuchs erst dadurch, dass man mehrere Aktionen nacheinander ausführt, ist es oft günstig, die Wahrscheinlichkeit zeichnerisch durch einen Pfad zu ermitteln.
Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses berechnet man, indem man die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multipliziert.
Fasst man mehrere Ergebnisse zu einem Ereignis zusammen, so addiert man die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse.
2 Beispiele:

1. In einer Kiste liegen 6 Tischtennisbälle, 3 weiße, 2 gelbe und 1 blauer. Man nimmt nun ohne Hinzusehen einen Ball aus der Kiste, schreibt die Farbe auf, legt den Ball zurück und nimmt dann noch einmal einen Ball. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zweimal einen Ball mit der selben Farbe zu ziehen?



Da 6 Bälle insgesamt und 3 weiße Bälle vorhanden sind, gilt p(weiß)=3/6 . Ebenso gilt p(gelb)=2/6 und p(blau)=1/6
Da die Bälle nach dem ersten Ziehen wieder zurück gelegt werden, bleiben die Wahrscheinlichkeiten auch beim 2. Ziehen gleich.
Nach der Pfadregel ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis aus der Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten an den Pfaden:
p(ww) = 3/6 · 3/6 = 9/36
p(gg) = 2/6 · 2/6 = 4/36
p(bb) = 1/6 · 1/6 = 1/36
Die Wahrscheinlichkeit für mehrere zusammengefasste Ergebnisse ergibt sich aus der Additionsregel für Pfade:
p(ww oder gg oder bb) = 9/36 + 4/36 + 1/36 = 14/36 = 7/18

Wird die zuerst gezogene Kugel nicht wieder zurückgelegt, hat man beim zweiten Ziehen nur noch 5 Kugeln und von einer Farbe gibt es eine Kugel weniger. Damit ergibt sich folgendes Pfaddiagramm:



Es ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:
p(ww) = 3/6 · 2/5 = 6/30
p(gg) = 2/6 · 1/5 = 2/30
p(bb) = 1/6 · 0/5 = 0
und zusammengefasst:
p(ww oder gg oder bb) = 6/30 + 2/30 + 0 = 8/30 = 4/15