Eindeutigkeit der Wurzel ↔ 2 Lösungen bei quadratischen Gleichungen

Definition: Eine (Quadrat-)Wurzel aus einer **positiven** Zahl ist diejenige **positive** Zahl, die mit sich selbst multipliziert die Zahl unter der Wurzel ergibt.

Dass man nur aus einer positiven Zahl eine (Quadrat-)Wurzel ziehen kann, liegt daran, dass die Multiplikation einer Zahl mit sich selbst immer ein positives Ergebnis ergibt, denn „plus mal plus gibt plus" und auch „minus mal minus gibt plus".

Warum muss aber das Ergebnis einer Wurzelberechnung positiv sein?

Dazu ein Beispiel: $4+\sqrt{9}-5=?$
Wenn $\sqrt{9}$ sowohl +3 als auch -3 sein könnte, ergäbe der Term zwei verschiedene Lösungen:
$4+3-5=2$ und $4-3-5=-4$.
Die Eindeutigkeit bei Rechnungen wäre damit nicht mehr gewährleistet und es wäre Raum für weitreichende Manipulationen geschaffen. Z.B.: $10=6+4=6+\sqrt{16}=6+(-4)=2$ So geht es nicht!

Also: Man hat festgelegt, dass eine Wurzel nur einen einzigen Wert haben darf und der Einfachheit halber hat man den positiven Wert gewählt. **Der Wert einer Wurzel ist immer positiv**.

Nun wird bei der Lösung quadratischer Gleichungen häufig so gerechnet:

$x^2=9 \;\mid\; \sqrt{}$

$x=\pm 3$

Hier sieht es so aus, als würde Folgendes gelten: $\sqrt{x^2}=x$ und $\sqrt{9}=\pm 3$.
Das ist aber ein Widerspruch zum oben Geschriebenen, denn hier hätte eine Wurzel 2 verschiedene Werte!

Die Lösung liegt darin, dass ein Rechenschritt „vergessen" wurde:
Es gilt $\sqrt{9}=+3$.
Die Wurzel aus x² muss positiv sein. Man darf also nicht einfach x schreiben, denn der x-Wert könnte ja auch negativ sein. Um das Ergebnis positiv zu machen, schreibt man $\sqrt{x^2}=|x|$, also Betrag von x.
Die Betragsfunktion hat die Eigenschaft, dass sie das, was zwischen den senkrechten Strichen steht, positiv macht. Es gilt also z.B.: $|7|=7$; $|-4|=4$; $|0|=0$; $\left|-\frac{4}{6}\right|=+\frac{2}{3}$

Damit sieht die Rechnung so aus:

$x^2=9 \;\mid\; \sqrt{}$

$|x|=+3$

$x=\pm 3$

Der Schritt von der vorletzten zur letzten Zeile erfolgt so, dass man sich überlegt, welche Zahl denn nun für x in den Betragstrichen eingesetzt werden kann, sodass als Ergebnis +3 herauskommt, und das sind die Zahlenwerte +3 und -3.

Anmerkung:
Da die zwischengeschaltete Zeile fast identisch mit der unteren Zeile ist, lässt man Zeile 2 oft einfach weg und trägt damit möglicherweise zu Irritationen bei.