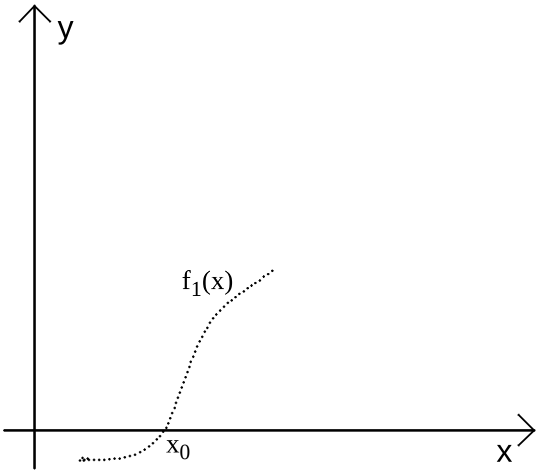
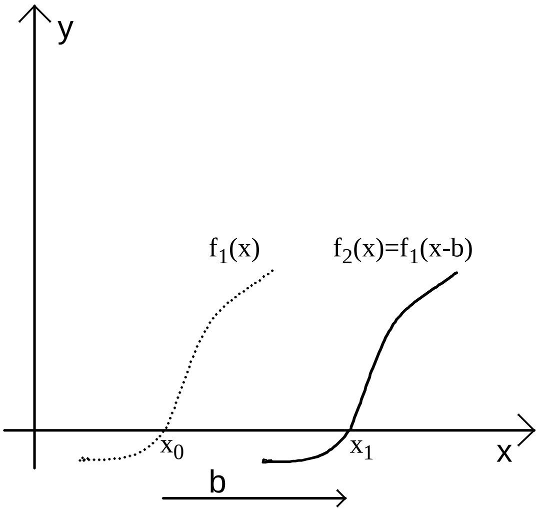
Die Lage von Graphen im Koordinatensystem

Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Teil des Graphen irgendeiner Funktion $f_1(x)$.
Setzt man für x einen Zahlenwert ein, erhält man für y einen Wert, der sich aus $f_1(x)$ ergibt.
Beispiel: Ist $f_1(x)=x^2$, dann ist für x=3 der y-Wert:
$y=f_1(3)=3^2=9$.
Um die Verschiebungen im Koordinatensystem besser verfolgen zu können, habe $f_1(x)$ bei x_0 eine Nullstelle.



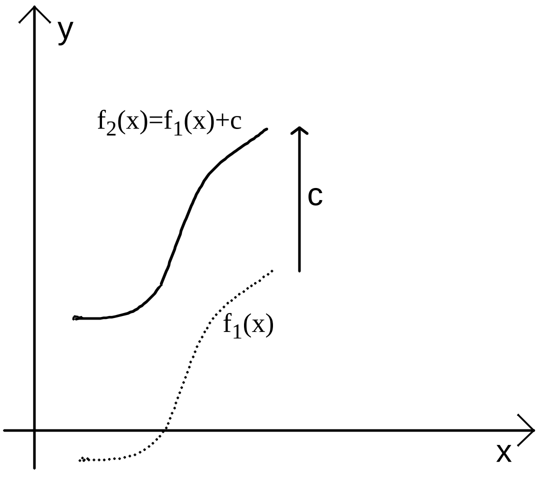
Verschiebung in x-Richtung:

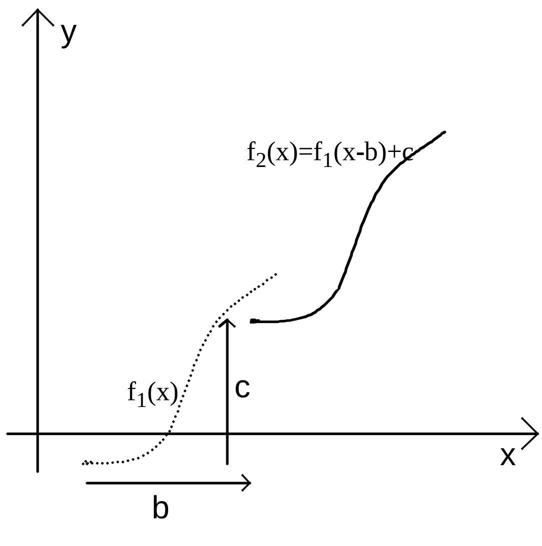
Wird der Graph von $f_1(x)$ um b in x-Richtung verschoben, verschiebt sich z.B. die Nullstelle von x_0 nach x_1.
Damit ich die y-Werte der neuen Funktion $f_2(x)$ erhalte, muss ich immer b vom x-Wert abziehen und dann $f_1(x)$ benutzen.
Wenn ich z.B. den y-Wert von $f_2(x)$ bei x_1 berechnen will, bilde ich x_1-b und erhalte x_0. Für diesen Wert berechne ich den y-Wert von $f_1(x)$ und erhalte $f_1(x_0)=0$. D.h. der y-Wert von $f_2(x)$ ist bei x_1 gleich 0.
Also: $f_2(x_1) = f_1(x_1-b) = f_1(x_0) = 0$.
Bei Verschiebung nach rechts ist b>0, bei Verschiebung nach links ist b<0.



Verschiebung in y-Richtung:

Wird der Graph der Funktion $f_1(x)$ um c in y-Richtung verschoben, so erhält man den Graph der Funktion $f_2(x)$.
Die y-Werte der Funktion $f_2(x)$ sind alle um c größer als die y-Werte der Funktion $f_1(x)$, also $f_2(x) = f_1(x)+c$.
Bei Verschiebung nach oben ist c>0, bei Verschiebung nach unten ist c<0.

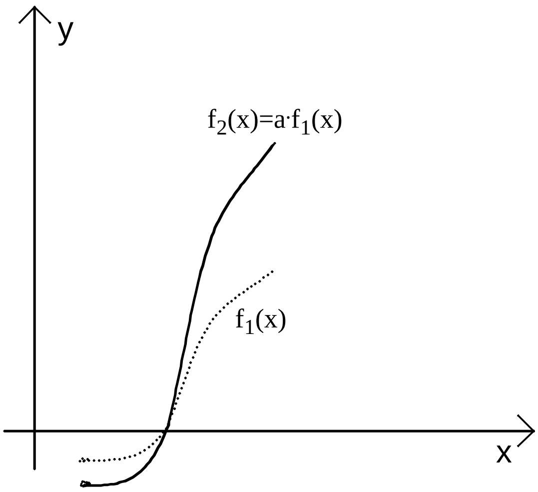




Links der Graph der Funktion $f_2(x)$, der sich daraus ergibt, dass der Graph der Funktion $f_1(x)$ um b in waagrechte Richtung und um c in senkrechte Richtung verschoben wird.
Es gilt: $f_2(x) = f_1(x-b)+c$

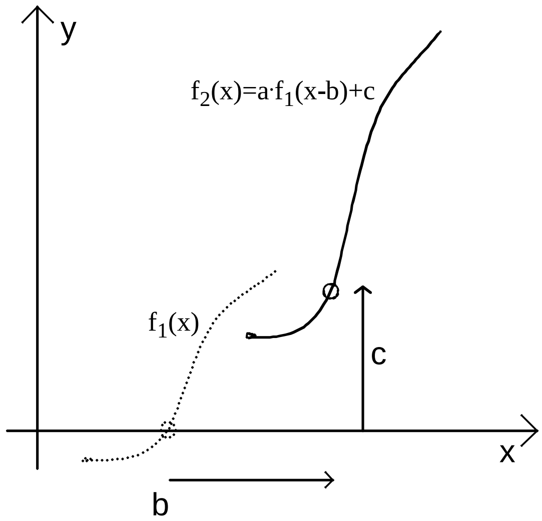
Streckung von Graphen:

Wird jeder y-Wert eines Graphen mit einer Zahl a multipliziert, ergibt sich ein Graph, der steiler (bei a>1 oder a<-1) oder flacher (a<1 und a>-1) verläuft. Negative a-Werte bewirken einen Kurvenverlauf, der gegenüber dem ursprünglichen Graphen an einer waagrechten Achse gespiegelt ist.



Soll ein Graph f(x) sowohl gestreckt als auch verschoben werden, streckt man ihn erst (aus f(x) entsteht a·f(x)) und verschiebt ihn dann (dann ergibt sich a·f(x-b)+c).

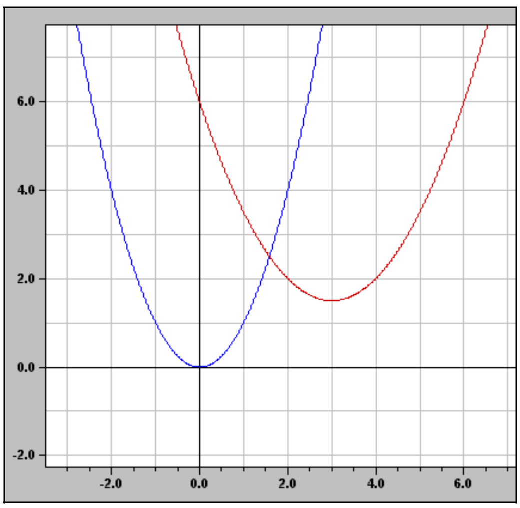
Dieses Verfahren lässt sich bei jeder beliebigen Funktion anwenden.
Unten wird an Hand einer Parabel und einer Hyperbel gezeigt, wie man aus dem Kurvenverlauf auf die zugehörige Funktionsgleichung schließen kann.

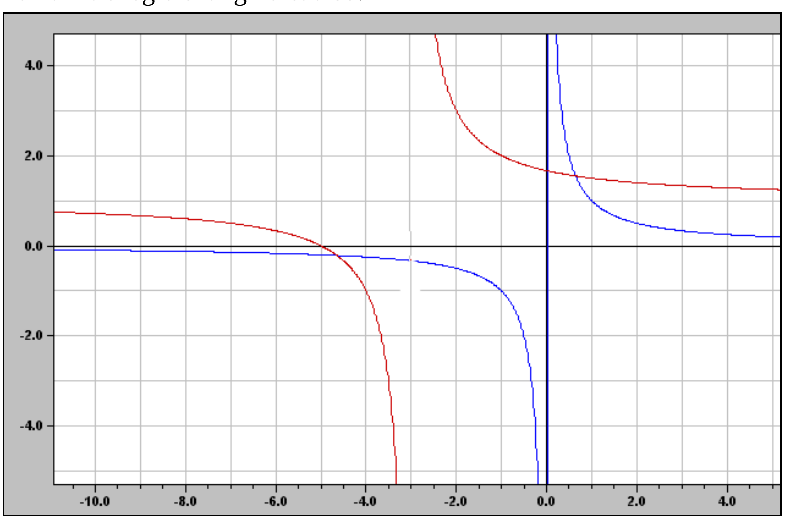


Linkes Bild: Verschobene Parabel:
Der Scheitelpunkt der Normalparabel ist um 3 nach rechts und um 1,5 nach oben verschoben, d.h. b=3 und c=1,5.
Geht man bei der Normalparabel vom Scheitelpunkt um 1 nach rechts, muss man um 1 nach oben gehen, um wieder zur Parabel zu kommen. Bei der verschobenen Parabel muss man aber, wenn man vom Scheitelpunkt um 1 nach rechts gegangen ist, um 0,5 nach oben gehen. Die y-Werte sind also mit dem Faktor a=0,5 gestreckt.
Die Funktionsgleichung heißt also:
$f(x)=0{,}5\cdot(x-3)^2+1{,}5$.

Rechtes Bild: Verschobene Hyperbel:
Der Schnittpunkt der Asymptoten ist um 3 nach links und um 1 nach oben verschoben, d.h. b=-3 und c=1.
Geht man bei der Normalhyperbel vom Schnittpunkt der Asymptoten um 1 nach rechts, muss man um 1 nach oben gehen, um wieder zur Hyperbel zu kommen. Bei der verschobenenen Hyperbel muss man aber, wenn man vom Schnittpunkt der Asymptoten um 1 nach rechts geht, um 2 nach oben gehen. Die y-Werte sind also mit dem Faktor a=2 gestreckt.

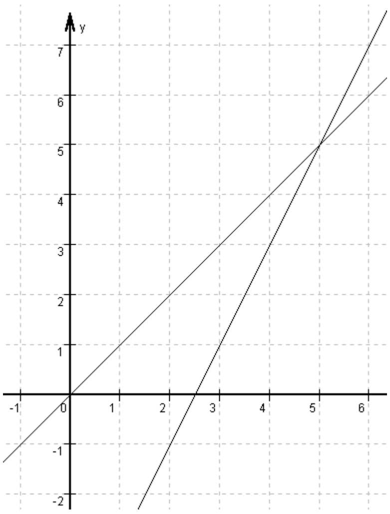
Die Funktionsgleichung heißt also: $f(x)=2\cdot\dfrac{1}{x+3}+1$



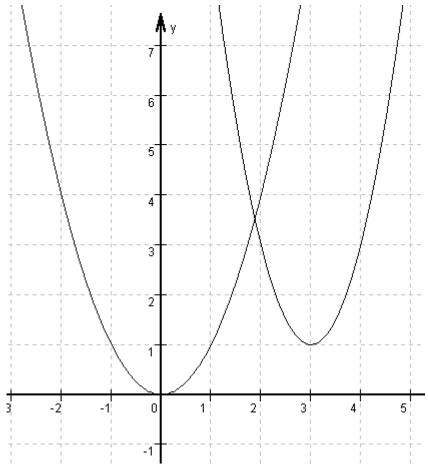


In folgender Tabelle sind für die Funktionstypen, die wir kennengelernt haben, die Graphen der Grundfunktionen und die Graphen der Funktionen bei Streckung um 2, Verschiebung nach rechts um 3 und nach oben um 1 aufgetragen.

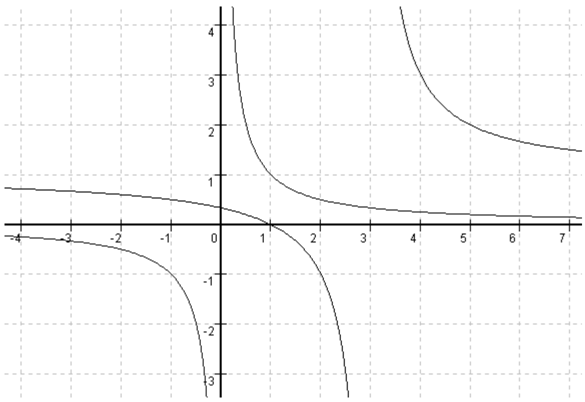
1. Gerade:
einfachste Form: $y=x$
beliebig gestreckt und verschoben: $y=a\cdot(x-b)+c$
Beispiel: $y=2\cdot(x-3)+1=2\cdot x-6+1=2\cdot x-5$



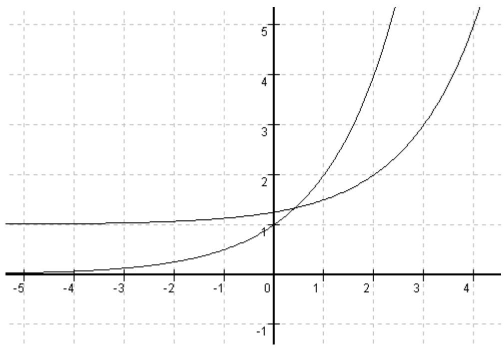
2. Parabel:
einfachste Form: $y=x^2$
beliebig gestreckt und verschoben: $y=a\cdot(x-b)^2+c$
Beispiel: $y=2\cdot(x-3)^2+1$



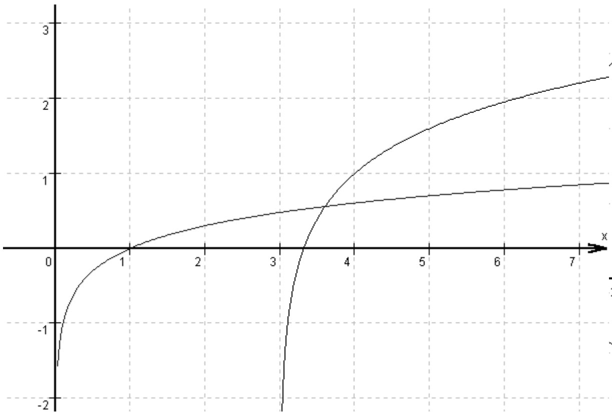
3. Hyperbel:
einfachste Form: $y=1/x$
beliebig gestreckt und verschoben: $y=a/(x-b)+c$
Beispiel: $y=2/(x-3)+1$



4. Exponentialfunktion:
einfachste Form: $y=2^x$
beliebig gestreckt und verschoben: $y=a\cdot 2^{(x-b)}+c$
Beispiel: $y=2\cdot 2^{(x-3)}+1$



5. Logarithmusfunktion:
einfachste Form: $y=\log_{10}x$
beliebig gestreckt und verschoben: $y=a\cdot\log_{10}(x-b)+c$
Beispiel: $y=2\cdot\log_{10}(x-3)+1$



6. Sinusfunktion:
einfachste Form: $y=\sin(x)$
beliebig gestreckt und verschoben: $y=a\cdot\sin(x-b)+c$
Beispiel: $y=2\cdot\sin(x-3)+1$