

Berechnung des Kreisumfang - π - Subtraktionskatastrophe

Räder, Satellitenbahnen, Flaschen, Karussells, ... - überall in unserer unmittelbaren und fernerer Umwelt gibt es Gegenstände und Bewegungsbahnen, die sich mathematisch durch Kreise darstellen lassen. Häufig müssen in Anwendungen die Kreisbahnen sehr genau vermessen werden. Wie berechnet man aber den gekrümmten Umfang eines Kreises?



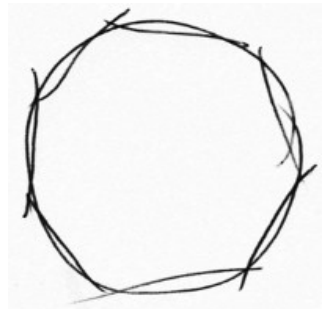
Man könnte den Kreis aufschneiden und abrollen. Die entstehende Strecke ließe sich dann ausmessen. Dieses Vorgehen ist zwar praktikabel und die Genauigkeit des Ergebnisses wird sicher in vielen Fällen ausreichen, aber ein absolut genaues Ergebnis lässt sich so nicht erreichen. In der Mathematik führt folgendes Verfahren häufig zum Erfolg: Zunächst wird die gesuchte Größe angenähert berechnet. Dann führt man Verbesserungen mit geeigneten Rechenmethoden aus, für die man zeigen kann, dass der Fehler, den man bei den Näherungen macht, gegen Null strebt.

Solch ein Näherungsverfahren soll hier angewendet werden:

Ein Kreisumfang wird durch kurze Strecken angenähert. Die Längen dieser Strecken ergeben zusammen etwa die Länge des Kreisumfangs.

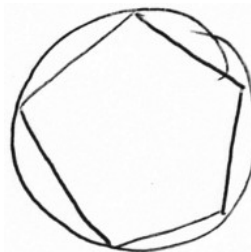
Wählt man immer kürzere Strecken, wird die Streckensumme immer besser mit dem Kreisumfang übereinstimmen.

Aber erlangt man mit dem Grenzprozess wirklich den genauen Kreisumfang?

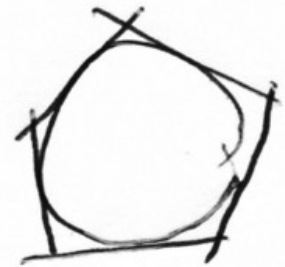


Die Gewähr für ein exaktes Ergebnis erhält man dadurch, dass man zwei Grenzprozesse vollzieht:

1. legt man die Strecken so, dass die Endpunkte der Strecken auf der Kreislinie liegen, die Strecken aber selbst vollständig innerhalb des Kreises verlaufen. Damit ist die Summe der Streckenlängen auf alle Fälle kleiner als der Kreisumfang, da die Strecken jeweils Abkürzungen beim Umlauf darstellen.



2. legt man die Strecken so, dass jede Strecke den Kreis berührt, dass aber der Verlauf der Strecken immer außerhalb des Kreises erfolgt.



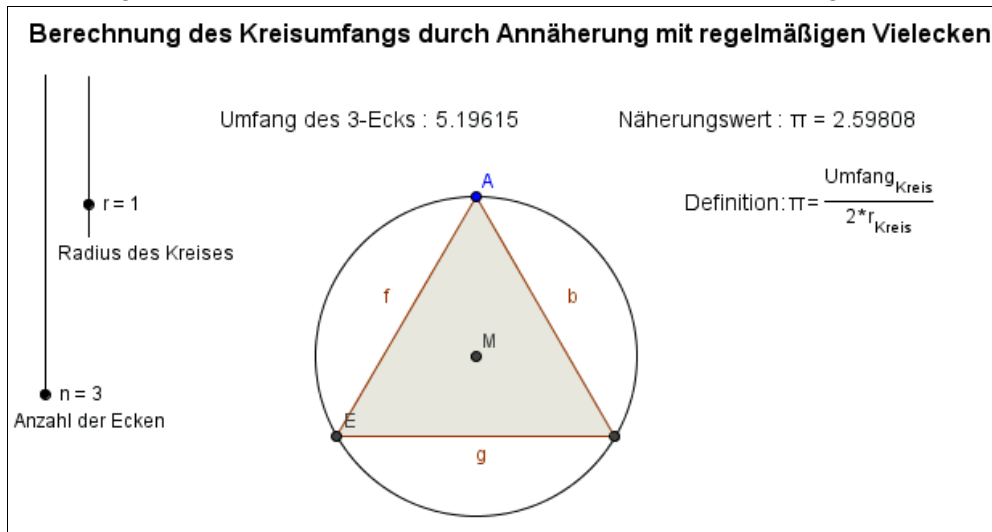
Kann man dann zeigen, dass beide Verfahren im Grenzfall zum selben Wert führen, ist damit der Kreisumfang exakt ermittelt worden.

Noch eine Vorüberlegung: Da der Radius und der Kreisumfang (siehe oben) durch Strecken dargestellt werden können, verändert sich bei verschiedenen großen Kreisen der Umfang proportional zum Radius. Es reicht also aus, für einen Kreis mit dem Radius 1 den Umfang U_1 zu bestimmen. Dann ergibt sich beim Radius r für den Umfang des Kreises $U_r = r \cdot U_1$.

U_1 ist also eine allgemeingültige Konstante und bildet den Proportionalitätsfaktor in der Proportionalität $r \sim U_r$.

Wegen der großen Bedeutung dieser Konstante hat man zwar nicht für U_1 , aber für die Hälfte von U_1 , einen besonderen Konstantennamen gewählt, den griechischen Buchstaben π .

Zur Veranschaulichung des Vorgehens kann [hier](#) ein GeoGebra-Applet heruntergeladen werden, das den Annäherungsprozess für in den Kreis eingeschriebene n-Ecke zeigt:



In erster Näherung soll der Kreisumfang durch den Umfang von Dreiecken angenähert werden. Dabei werden die Seitenlängen der eingeschriebenen n-Ecke durch kleine Buchstaben s und der Eckenzahl n als Index und die Seitenlängen der umschriebenen n-Ecke durch große Buchstaben S und der Eckenzahl n als Index angegeben. r ist jeweils der Radius des Kreises.

Kreis mit eingeschriebenem regelmäßigem Dreieck

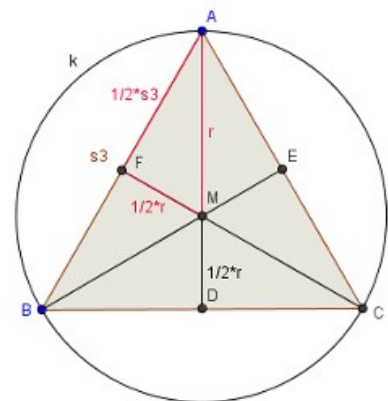
Ausgenutzt wird bei der Berechnung, dass im gleichseitigen Dreieck die Höhen und die Seitenhalbierenden identisch sind. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1:2.

Damit besitzt die Höhe die Länge $r + \frac{1}{2} \cdot r$.

Im Dreieck $\triangle MAF$ gilt: $r^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot r\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot s_3\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot r^2 + \frac{1}{4} \cdot s_3^2 \xrightarrow{4}$

$$s_3^2 + r^2 = 4 \cdot r^2 \rightarrow s_3^2 = 3 \cdot r^2 \rightarrow s_3 = \sqrt{3} \cdot r \rightarrow$$

$$U_{\text{eingeschriebenes Dreieck}} = 3 \cdot s_3 = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot r \approx 5,2 \cdot r$$



Kreis mit umschriebenem regelmäßigem Dreieck

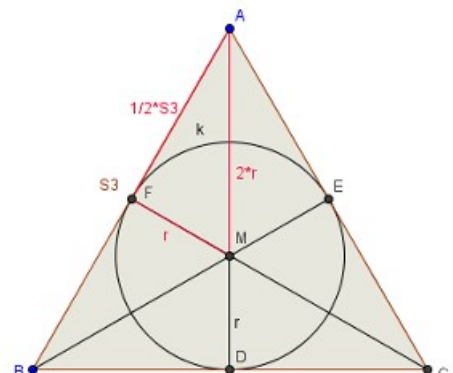
Auch hier wird die Teilung der Höhen durch den Punkt M im Verhältnis 1:2 ausgenutzt.

Im Dreieck $\triangle MAF$ gilt:

$$(2 \cdot r)^2 = r^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot S_3\right)^2 \rightarrow 4 \cdot r^2 = r^2 + \frac{1}{4} \cdot S_3^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{4} \cdot S_3^2 = 3 \cdot r^2 \rightarrow S_3^2 = 12 r^2 \rightarrow S_3 = \sqrt{12} \cdot r \rightarrow$$

$$U_{\text{umschriebenes Dreieck}} = 3 \cdot S_3 = 3 \cdot \sqrt{12} \cdot r = 6 \cdot \sqrt{3} \cdot r \approx 10,4 \cdot r$$



Für den Umfang U eines Kreises gilt also mit Sicherheit folgende Beziehung:

$$3 \cdot \sqrt{3} \cdot r \leq U \leq 6 \cdot \sqrt{3} \cdot r \text{ Das Intervall hat damit eine Länge von } (6 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3}) \cdot r = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot r \approx 5,2 \cdot r.$$

Um ein genaueres Ergebnis zu erhalten, wird die Eckenzahl um 1 auf $n=4$ erhöht:

Kreis mit einbeschriebenem regelmäßigem Viereck

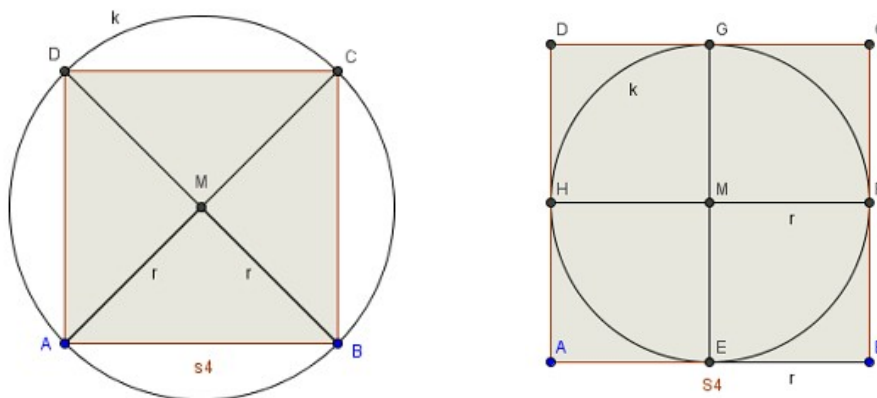
Im Dreieck $\triangle ABM$ gilt: $r^2 + r^2 = s_4^2 \rightarrow s_4 = \sqrt{2 \cdot r^2} = \sqrt{2} \cdot r \rightarrow$

$$U_{\text{einbeschriebenes Viereck}} = 4 \cdot s_4 = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot r \approx 5,7 \cdot r$$

Kreis mit umbeschriebenem regelmäßigem Viereck

Es ist unmittelbar zu sehen: $S_4 = 2 \cdot r \rightarrow U_{\text{umbeschriebenes Viereck}} = 4 \cdot 2 \cdot r = 8 \cdot r$

Das Intervall für den Kreisumfang verringert sich bei der Rechnung mit Vierecken auf $4 \cdot \sqrt{2} \cdot r \leq U \leq 8 \cdot r$. Die Länge des Intervalls beträgt nun $8 \cdot r - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot r \approx 2,3 \cdot r$



Kreis mit einbeschriebenem regelmäßigem Sechseck

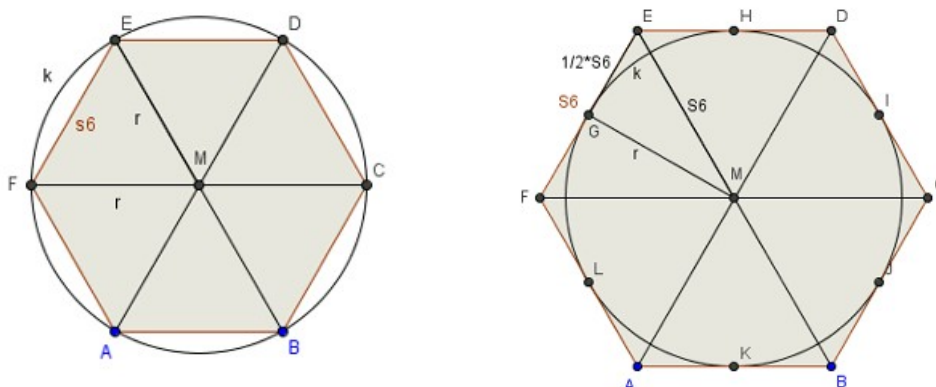
Ein regelmäßiges Sechseck besteht aus 6 regelmäßigen Dreiecken. Es gilt $s_6 = r \rightarrow U_{\text{einbeschriebenes Sechseck}} = 6 \cdot s_6 = 6 \cdot r$

Kreis mit umbeschriebenem regelmäßigem Sechseck

Im Dreieck $\triangle MEG$ gilt $S_6^2 = r^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot S_6\right)^2 = r^2 + \frac{1}{4} \cdot S_6^2 \rightarrow \frac{3}{4} \cdot S_6^2 = r^2 \rightarrow S_6^2 = \frac{4}{3} \cdot r^2 \rightarrow S_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot r \rightarrow$

$$U_{\text{umbeschriebenes Sechseck}} = 6 \cdot S_6 = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot r = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot r = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot r \approx 6,9 \cdot r$$

Das Intervall für den Kreisumfang verringert sich bei der Rechnung mit Sechsecken auf $4 \cdot \sqrt{3} \cdot r \leq U \leq 6 \cdot r$. Die Länge des Intervalls beträgt nun $6 \cdot r - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot r \approx 0,9 \cdot r$



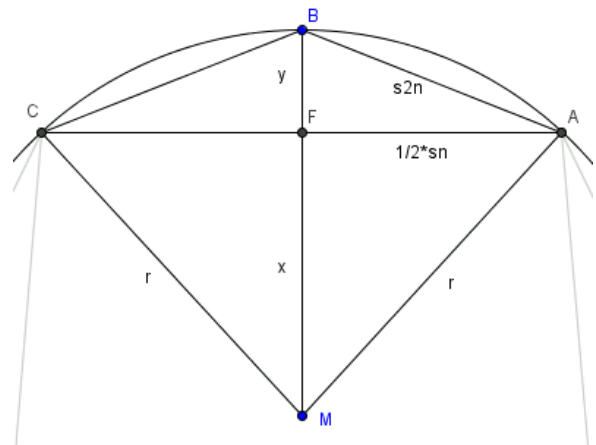
Die mit den Sechsecken erreichte Näherung ist schon recht gut, aber der Nachweis, dass man auf die beschriebene Weise mit wachsendem n dem wahren Umfang beliebig nahe kommen kann, fehlt noch.

Da wir nicht selbst unendlich lange weiter rechnen können, greifen wir zu einem mathematischen Trick: Wir nehmen an, dass wir die Seitenlänge s_n des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks kennen und berechnen damit die Seitenlänge s_{2n} des einbeschriebenen regelmäßigen 2n-Ecks, also des Ecks, das doppelt so viele Eckpunkte hat.

Beginnen wir dann mit einem einfach zu berechnenden n-Eck, z.B mit dem 6-Eck und der Seitenlänge $s_6=r$, so erhalten wir die Seitenlängen s_{12} , s_{24} , s_{48} , ... unmittelbar mit Hilfe unserer Formel nach dem Dominoeffekt.

In nebenstehender Zeichnung liest man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras folgende Beziehungen ab :

- (1) $\Delta MAF: x^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot s_n\right)^2 = r^2$
- (2) $\Delta ABF: y^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot s_n\right)^2 = s_{2n}^2$
- (3) Strecke MB: $x + y = r$



Aus (1) und (2) ergeben sich nach Umformung und Wurzelziehen $x = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} \cdot s_n^2}$ und $y = \sqrt{s_{2n}^2 - \frac{1}{4} \cdot s_n^2}$.

Eingesetzt in (3) folgt daraus: $\sqrt{r^2 - \frac{1}{4} \cdot s_n^2} + \sqrt{s_{2n}^2 - \frac{1}{4} \cdot s_n^2} = r \rightarrow \sqrt{s_{2n}^2 - \frac{1}{4} \cdot s_n^2} = r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} \cdot s_n^2}$ Quadrieren \rightarrow

$$s_{2n}^2 - \frac{1}{4} \cdot s_n^2 = \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} \cdot s_n^2}\right)^2 = r^2 - 2 \cdot r \cdot \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} \cdot s_n^2} + r^2 - \frac{1}{4} \cdot s_n^2 \rightarrow$$

$$s_{2n}^2 = 2 \cdot r^2 - 2 \cdot r \cdot \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} \cdot s_n^2} = 2 \cdot r^2 - r \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - s_n^2} \rightarrow s_{2n} = \sqrt{2 \cdot r^2 - r \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - s_n^2}}$$

Weiter oben haben wir berechnet $s_3 = \sqrt{3} \cdot r$ und $s_6 = r$.

Um Vertrauen in die gefundene Formel zu erhalten, setzen wir die Werte in die Formel ein

$s_6 = s_{2 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot r^2 - r \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - s_3^2}} = \sqrt{2 \cdot r^2 - r \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - (\sqrt{3} \cdot r)^2}} = \sqrt{2 \cdot r^2 - r \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - 3 \cdot r^2}} = \sqrt{2 \cdot r^2 - r \cdot \sqrt{r^2}} = \sqrt{2 \cdot r^2 - r \cdot r} = \sqrt{2 \cdot r^2 - r^2} = \sqrt{r^2} = r$ und sehen, dass die Formel mit unseren Rechnungen verträglich ist.

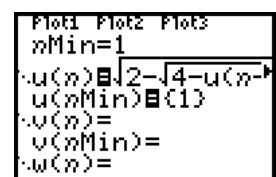
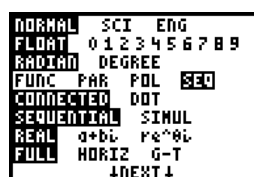
Wie auf Seite 1 schon erwähnt, kommt es für die Bestimmung des Wertes von $\pi = U_r / (2r)$ nicht auf den Wert des Radius r an, da $r \sim U_r$.

Wir wählen deshalb ab jetzt $r=1$ und erhalten $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$.

Da es in der Listenansicht des GTR (TI-84+) nicht möglich ist, in einer Liste zur Berechnung eines Wertes auf den darüber stehenden Listeneintrag zuzugreifen, werden die Werte für s_n und s_{2n} als Folge berechnet und dann in die Listen übertragen.

Erstellen der Folge:

1. Modus auf SEQ einstellen.
2. Unter Y= eingeben:
 $nMin=1$; $u(n) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - u(n-1)^2}}$; $u(nMin) = \{1\}$



In die Listen des GRT wird eingetragen

L₁ : Nummer n des Folgengliedes (1, 2, 3, ...) mit der Formel L1="seq(n,n,1,10)"

L₂ : Seitenlängen s_n (s₆, s₁₂, s₂₄, s₄₈, ...) mit der Formel L2="u(L1)"

L₃ : Eckenzahl (6, 12, 24, 48, ...) mit der Formel L3="6*2^(L1-1)"

L₄ : Umfang des n-Ecks mit der Formel L4="L2*L3"

L₅ : Näherung für den Wert von π mit der Formel L5="L4/2"

L1 #	L2 #	L3 #	L4 #	L5 #
1	-----	-----		
1	.51764	6	6.2117	3.1058
	.26105	12	6.2653	3.1326
	.13081	24	6.2787	3.1394
	.06544	48	6.2821	3.141
	.03272	96	6.2829	3.1415
	.01636	192	6.2831	3.1416
		384		
L1="seq(n,n,1,10)"				
L2="u(L1)"				
L3="6*2^(L1-1)"				
L4="L2*L3"				
L5="L4/2"				

Der Umfang der betrachteten n-Ecke ist immer kleiner als der Umfang des Kreises, da die n_Ecke dem Kreis einbeschrieben sind. Die Werte für den Umfang wachsen deshalb für wachsendes n vom Wert 6 an bis zu einem Grenzwert von (für das 24576-Eck angezeigt) U=6,2832.

Diesem Wert entspricht der π-Wert 3,1416.

L3 #	L4 #	L5 #
384	6.2831	3.1416
768	6.2832	3.1416
1536	6.2832	3.1416
3072	6.2832	3.1416
6144	6.2832	3.1416
12288	6.2832	3.1416
24576	6.2832	3.1416
L5(13)=3.14159248...		

Gibt man aber in Liste L1 bei seq(n,n,1,10) statt 10 einen größeren Wert ein, so erkennt man, dass die Umfangs- und π-Werte bei größeren n-Werten nicht mehr konstant bleiben, sondern unterschiedliche Werte annehmen und ab n=22 sogar zu 0 werden.

Grund für diese Erscheinung ist die „Subtraktionskatastrophe“.

Unter diesem Begriff versteht man Fehler, die dadurch entstehen, dass ein Produkt aus einer sehr großen Zahl und einer sehr kleinen Zahl gebildet wird, wobei die sehr kleine Zahl sich aus der Differenz zweier größerer Zahlen ergibt.

Dazu ein Beispiel:

$$1000000 \cdot (100 - 99,9) = 1000000 \cdot 0,1 = 100000 \quad 1000000 \cdot (100 - 99,8) = 1000000 \cdot 0,2 = 200000$$

Die beiden Ergebnisse unterscheiden sich um 100000, obwohl die ausschlaggebenden Zahlen 99,9 und 99,8 in den beiden Rechnungen sich nur um 0,1 unterscheiden. Eine kleine Ursache hat also hier eine sehr große Wirkung.

Da ein Taschenrechner oder Computer niemals völlig exakt mit Zahlen rechnen kann, kommt es auf Grund von Rundungsfehlern unter bestimmten Bedingungen zu extremen Abweichungen vom richtigen Ergebnis.

Liegen solche kritischen Bedingungen vor, wie hier z.B. die Multiplikation einer sehr kleinen Zahl (Seitenlänge) mit einer sehr großen Zahl (Eckenzahl), so sollte man darauf achten, dass bei der Berechnung nicht zwei etwa gleich große Zahlen voneinander subtrahiert werden.

In unserem Fall wird in der Formel $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$ das s_n unter der Wurzel für große n-Werte sehr klein. Damit nimmt die innere Wurzel fast den Wert $\sqrt{4} = 2$ an und die äußere Wurzel hat näherungsweise den Wert $\sqrt{2 - 2} = \sqrt{0} = 0$. Ab einem bestimmten n-Wert rundet der Rechner den Wert für s_{2n} auf 0 und damit werden alle folgenden berechneten Seitenlängen mit 0 angegeben.

Abhilfe schafft, die Wurzel so umzuformen, dass die Subtraktion fast gleicher Zahlenwerte entfällt:

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \stackrel{\text{erweitern}}{=} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}} \stackrel{\text{zusammenfassen}}{=} \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{4 - s_n^2}) \cdot (2 + \sqrt{4 - s_n^2})}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}} \stackrel{\text{3. binomische Formel}}{=} \frac{\sqrt{4 - (4 - s_n^2)}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}} = \frac{\sqrt{4 - 4 + s_n^2}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}} = \frac{\sqrt{s_n^2}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}} = s_{2n}$$

In der unter dem Bruchstrich stehenden Wurzel wird nun das Argument für wachsendes n nicht mehr zu 0, sondern zu $2 + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$. Der durch die Wurzel bedingte Rundungsfehler tritt hier also nicht mehr auf.

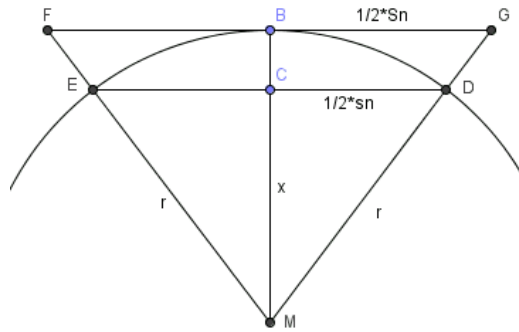
Für große n gilt $s_{2n} \approx \frac{s_n}{\sqrt{2+\sqrt{4}}} = \frac{s_n}{\sqrt{2+2}} = \frac{s_n}{\sqrt{4}} = \frac{s_n}{2}$. Während sich die Eckenzahl verdoppelt, halbiert sich die Seitenlänge des n-Ecks. Das Produkt aus beiden Größen, das den Umfang des n-Ecks angibt, bleibt also konstant.

Der besseren Übersichtlichkeit halber werden die Auswirkungen der verschiedenen Formeln in der folgenden OOo-Calc-Tabelle ([download](#)) zusammengefasst:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		$s_n = \sqrt{2 \cdot r^2 - r \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - s_n^2}}$			$s_n \cdot r = \sqrt{2 \cdot r^2 + r \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - s_n^2}}$			Startbedingungen	
2	Anzahl n der Ecken	Seitenlänge s_n	Umfang U_n	Näherung für π	Seitenlänge s_n	Umfang U_n	Näherung für π	Radius r =	1
3	6	1,00000000000000	6,00000000000000	3,00000000000000	1,00000000000000	6,00000000000000	3,00000000000000	Start mit n-Eck: n =	6
4	12	0,51763809020504	6,21165708246050	3,10582854123025	0,51763809020504	6,21165708246050	3,10582854123025		
5	24	0,26105238444010	6,26525722656247	3,13262861328124	0,26105238444010	6,26525722656248	3,13262861328124		
6	48	0,13080625846029	6,27870040609374	3,13935020304687	0,13080625846029	6,27870040609373	3,13935020304687		
7	96	0,06543816564355	6,28206390178106	3,14103195089053	0,06543816564355	6,28206390178102	3,14103195089051		
8	192	0,03272346325297	6,28290494457069	3,14145247228534	0,03272346325297	6,28290494457092	3,14145247228546		
9	384	0,01636227920787	6,28311521582324	3,14155760791162	0,01636227920787	6,28311521582372	3,14155760791186		
10	768	0,00818120805247	6,28316778429787	3,14158389214894	0,00818120805247	6,28316778429664	3,14158389214832		
11	1536	0,00409061258234	6,28318092647352	3,14159046323676	0,00409061258233	6,28318092645610	3,14159046322805		
12	3072	0,00204530736071	6,28318421208610	3,14159210604305	0,00204530736068	6,28318421199854	3,14159210599927		
13	6144	0,00102265381399	6,28318503317631	3,14159251658815	0,00102265381403	6,28318503338431	3,14159251669216		
14	12288	0,00051132692361	6,28318523728158	3,14159261864079	0,00051132692372	6,28318523873077	3,14159261936538		
15	24576	0,00025566346397	6,28318529064243	3,14159264532122	0,00025566346395	6,28318529006738	3,14159264503369		
16	49152	0,00012783173199	6,28318529064243	3,14159264532122	0,00012783173224	6,28318530290153	3,14159265145077		
17	98304	0,00006391586599	6,28318529064243	3,14159264532122	0,00006391586615	6,28318530611007	3,14159265305504		
18	196608	0,00003195793300	6,28318529064243	3,14159264532122	0,00003195793308	6,28318530691221	3,14159265345610		
19	393216	0,00001597897171	6,28318733969885	3,14159366984943	0,00001597896654	6,28318530711274	3,14159265355637		
20	786432	0,00000798948238	6,28318460762348	3,14159230381174	0,00000798948327	6,28318530716287	3,14159265358144		
21	1572864	0,00000399476203	6,28321739244961	3,14160869622480	0,00000399474164	6,28318530717541	3,14159265358770		
22	3145728	0,00000199736712	6,28317367931008	3,14158683965504	0,00000199737082	6,28318530717854	3,14159265358927		
23	6291456	0,00000099871135	6,28334853004352	3,14167426502176	0,00000099868541	6,28318530717932	3,14159265358966		
24	12582912	0,00000049935568	6,28334853004352	3,14167426502176	0,00000049934270	6,28318530717952	3,14159265358976		
25	25165824	0,00000024978898	6,28614548034008	3,14307274017004	0,00000024967135	6,28318530717957	3,14159265358978		
26	50331648	0,0000001255942	6,31961232988227	3,15980616494113	0,00000012483568	6,28318530717958	3,14159265358979		
27	100663296	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000006241784	6,28318530717958	3,14159265358979		
28	201326592	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000003120892	6,28318530717959	3,14159265358979		
29	402653184	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000001560446	6,28318530717959	3,14159265358979		
30	805306368	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000780223	6,28318530717959	3,14159265358979		
31	1610612736	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000390111	6,28318530717959	3,14159265358979		
32	3221225472	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000195056	6,28318530717959	3,14159265358979		
33	6442450944	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000097528	6,28318530717959	3,14159265358979		
34	12884901888	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,0000000048764	6,28318530717959	3,14159265358979		
35	25769803776	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,0000000024382	6,28318530717959	3,14159265358979		
36	51539607552	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,0000000012191	6,28318530717959	3,14159265358979		
37	103079215104	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,0000000006095	6,28318530717959	3,14159265358979		
38	206158430208	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,0000000003048	6,28318530717959	3,14159265358979		
39	412316860416	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,0000000001524	6,28318530717959	3,14159265358979		
40	824633720832	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,0000000000762	6,28318530717959	3,14159265358979		
41	1649267441664	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,0000000000381	6,28318530717959	3,14159265358979		
42	3298534883328	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,0000000000190	6,28318530717959	3,14159265358979		

Nun ist aber erst gezeigt, dass die in den Kreis einbeschriebenen n-Ecke für sehr große n einem einheitlichen Umfang zustreben. Ob das aber der Umfang des Kreises ist, lässt sich erst sagen, wenn auch die dem Kreis umbeschriebenen n-Ecke für große n denselben Umfang haben, weil dann wegen $U_{n\text{-Eck einbeschrieben}} \leq U_{\text{Kreis}} \leq U_{n\text{-Eck umbeschrieben}}$ für den Wert des Kreisumfangs kein Spielraum mehr bleibt.

Herleitung der Formel für die Seitenlänge S_n des dem Kreis umbeschriebenen n-Ecks:



Im Dreieck ΔMDC gilt $r^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot s_n\right)^2 + x^2 \rightarrow x^2 = r^2 - \frac{1}{4} \cdot s_n^2 \rightarrow x = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} \cdot s_n^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - s_n^2}$.

Strahlensatz: $\frac{\frac{1}{2} \cdot S_n}{\frac{1}{2} \cdot s_n} = \frac{r}{x} \rightarrow S_n = \frac{s_n \cdot r}{x} = \frac{s_n \cdot r}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - s_n^2}} = \frac{2 \cdot s_n \cdot r}{\sqrt{4 \cdot r^2 - s_n^2}} = S_n$

OOo-Calc-Tabelle ([download](#)) mit der Berechnung der Umfänge von einbeschriebenen und umbeschriebenen n-Ecken unter Verwendung der „besseren“ Formel für s_n .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		$s_n = \frac{s_n \cdot r}{\sqrt{2 \cdot r^2 + r \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - s_n^2}}}$	einbeschriebene n-Ecke		$S_n = \frac{2 \cdot s_n \cdot r}{\sqrt{4 \cdot r^2 - s_n^2}}$	umbeschriebene n-Ecke		Startbedingungen	
2	Anzahl n der Ecken	Seitenlänge s_n	Umfang U_e	Näherung für π	Seitenlänge S_n	Umfang U_u	Näherung für π	Radius r =	1
3	6	1,00000000000000	6,00000000000000	3,00000000000000	1,15470053837925	6,92820323027551	3,46410161513775	Start mit n-Eck: n =	6
4	12	0,51763809020504	6,21165708246050	3,10582854123025	0,53589838486225	6,43078061834695	3,21539030917347		
5	24	0,26105238444010	6,26525722656248	3,13262861328124	0,26330499517479	6,31931988419500	3,15965994209750		
6	48	0,13080625846029	6,27870040609373	3,13935020304687	0,13108692563048	6,29217243026287	3,14608621513143		
7	96	0,06543816564355	6,28206390178102	3,14103195089051	0,06547322082595	6,28542919929074	3,14271459964537		
8	192	0,03272346325297	6,28290494457092	3,14145247228546	0,03272784427062	6,28374609995965	3,14187304997982		
9	384	0,01636227920787	6,28311521582372	3,14155760791186	0,01636282680759	6,28332549411370	3,14166274705685		
10	768	0,00818120805247	6,28316778429664	3,14158389214832	0,00818127650157	6,28322035320938	3,14161017660469		
11	1536	0,00409061258233	6,28318092645610	3,14159046322805	0,00409062113844	6,28319406864305	3,14159703432153		
12	3072	0,00204530736068	6,28318421199854	3,14159210599927	0,00204530843019	6,28318749754270	3,14159374877135		
13	6144	0,00102265381403	6,28318503338431	3,14159251669216	0,00102265394772	6,28318585477019	3,14159292738510		
14	12288	0,00051132692372	6,28318523873077	3,14159261936538	0,00051132694044	6,28318544407723	3,14159272203861		
15	24576	0,00025566346395	6,28318529006738	3,14159264503369	0,00025566346604	6,28318534140399	3,14159267070200		
16	49152	0,00012783173224	6,28318530290153	3,14159265145077	0,00012783173250	6,28318531573569	3,14159265786784		
17	98304	0,00006391586615	6,28318530611007	3,14159265305504	0,00006391586618	6,28318530931861	3,14159265465931		
18	196608	0,00003195793308	6,28318530691221	3,14159265345610	0,00003195793308	6,28318530771434	3,14159265385717		
19	393216	0,00001597896654	6,28318530711274	3,14159265355637	0,00001597896654	6,28318530731328	3,14159265365664		
20	786432	0,00000798948327	6,28318530716287	3,14159265358144	0,00000798948327	6,28318530721301	3,14159265360650		
21	1572864	0,00000399474164	6,28318530717541	3,14159265358770	0,00000399474164	6,28318530718794	3,14159265359397		
22	3145728	0,00000199737082	6,28318530717854	3,14159265358927	0,00000199737082	6,28318530718167	3,14159265359084		
23	6291456	0,00000099868541	6,28318530717932	3,14159265358966	0,00000099868541	6,28318530718011	3,14159265359005		
24	12582912	0,00000049934270	6,28318530717952	3,14159265358976	0,00000049934270	6,28318530717972	3,14159265358986		
25	25165824	0,00000024967135	6,28318530717957	3,14159265358979	0,00000024967135	6,28318530717962	3,14159265358981		
26	50331648	0,00000012483568	6,28318530717958	3,14159265358979	0,00000012483568	6,28318530717959	3,14159265358980		
27	100663296	0,00000006241784	6,28318530717958	3,14159265358979	0,00000006241784	6,28318530717959	3,14159265358979		
28	201326592	0,00000003120892	6,28318530717959	3,14159265358979	0,00000003120892	6,28318530717959	3,14159265358979		
29	402653184	0,00000001560446	6,28318530717959	3,14159265358979	0,00000001560446	6,28318530717959	3,14159265358979		
30	805306368	0,00000000780223	6,28318530717959	3,14159265358979	0,00000000780223	6,28318530717959	3,14159265358979		
31	1610612736	0,00000000390111	6,28318530717959	3,14159265358979	0,00000000390111	6,28318530717959	3,14159265358979		
32	3221225472	0,00000000195056	6,28318530717959	3,14159265358979	0,00000000195056	6,28318530717959	3,14159265358979		
33	6442450944	0,00000000097528	6,28318530717959	3,14159265358979	0,00000000097528	6,28318530717959	3,14159265358979		
34	12884901888	0,00000000048764	6,28318530717959	3,14159265358979	0,00000000048764	6,28318530717959	3,14159265358979		
35	25769803776	0,00000000024382	6,28318530717959	3,14159265358979	0,00000000024382	6,28318530717959	3,14159265358979		
36	51539607552	0,00000000012191	6,28318530717959	3,14159265358979	0,00000000012191	6,28318530717959	3,14159265358979		
37	103079215104	0,00000000006095	6,28318530717959	3,14159265358979	0,00000000006095	6,28318530717959	3,14159265358979		
38	206158430208	0,00000000003048	6,28318530717959	3,14159265358979	0,00000000003048	6,28318530717959	3,14159265358979		
39	412316860416	0,00000000001524	6,28318530717959	3,14159265358979	0,00000000001524	6,28318530717959	3,14159265358979		
40	824633720832	0,00000000000762	6,28318530717959	3,14159265358979	0,00000000000762	6,28318530717959	3,14159265358979		
41	1649267441664	0,00000000000381	6,28318530717959	3,14159265358979	0,00000000000381	6,28318530717959	3,14159265358979		
42	3298534883328	0,00000000000190	6,28318530717959	3,14159265358979	0,00000000000190	6,28318530717959	3,14159265358979		

Die Tabelle zeigt, dass für große n (hier für n>26) kein Unterschied zwischen den Umfängen bei den einbeschriebenen und den umbeschriebenen n-Ecken zu erkennen ist.

Die folgende Herleitung zeigt, dass für ins Unendliche wachsende n-Werte kein Spielraum zwischen den Umfängen von ein- und umbeschriebenem n-Eck bleibt:

$$\begin{aligned}
 U_{n,\text{innen}} &\leq U_{\text{Kreis}} \leq U_{n,\text{außen}} \\
 n \cdot s_n &\leq U_{\text{Kreis}} \leq n \cdot S_n \\
 n \cdot s_n &\leq U_{\text{Kreis}} \leq n \cdot \frac{2 \cdot s_n \cdot r}{\sqrt{4 \cdot r^2 - s_n^2}}
 \end{aligned}$$

Für sehr großes n ist der Wert von s_n^2 gegenüber $4 \cdot r^2$ zu vernachlässigen. Es gilt dann

$$n \cdot s_n \leq U_{\text{Kreis}} \leq n \cdot \frac{2 \cdot s_n \cdot r}{\sqrt{4 \cdot r^2}} = n \cdot \frac{2 \cdot s_n \cdot r}{2 \cdot r} = n \cdot s_n$$

Links und rechts steht jeweils $n \cdot s_n$, d.h. für gegen unendlich gehendes n hat der Kreisumfang den Wert $n \cdot s_n = n \cdot S_n$.

Man schreibt dafür $U_{\text{Kreis}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot S_n)$

Mit $\frac{U}{2 \cdot r} = \pi$ (siehe oben auf Seite 1) gilt die Formel $U_{\text{Kreis}} = 2 \cdot \pi \cdot r$.

Der Wikipedia-Artikel zur Kreiszahl π ist sehr lesenswert und enthält viele gute Links:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Kreiszahl>

Hier der Wert von π mit den ersten 4000 Nachkommastellen:

3,14159265359140397848254241421927966391989323482583519907484797746312134673196076873117702027606580198567877822933137487565529317947017508282796173334466023408319243216876351349499743774543521332481988857618117195057452050214708711391482353328053536048318366295527975161202807244466489272785568066909098881103167056257244877546154836906331098097354711945038954490522398489502977422015658526826942312277172915188003715954213744097908268546201423352963583100629465105381282661894752995919575350837048830817208485310197225092008232099157881467637491676098138460400150172780909422458503807756917402230120604089193862646713052152156815460123371872199674991025258075212447898540199992875014044434700873906931241145149665810754892261991214344240956063500067139290735051916484203084022767070507216788659214662124944849868324778782887976038124155620654786209315645098968795301893876074571199162540112300740176425613776434382989918144872887510173657830770622038677712221817255071756829710095282985259500209639009846182514736389221540476771175595278874690679696256367956197778648609394568020322652248618163781504084535217983464551824681499425890554734964224349365465193073417499513582689572583054043018472896279387141592653591403978482542414219279663919893234825835199074847977463121346731960768731177020276065801985678778229331374875655293179470175082827961733344660234083192432168763513494997437745435213324819888576181171950574520502147087113914823533280535360483183662955279751612028072444664892727856806690909888110316705625724487754615483690633109809735471194503895449052239848950297742201565852682694231227717291518800371595421374409790826854620142335296358310062946510538128266189475299591957535083704883081720848531019722509200823209915788146763749167609813846040015017278090942224585038077569174022301206040891938626467130521521568154601233718721996749910252580752124478985401999928750140444347008739069312411451496658107548922619912143442409560635000671392907350519164842030840227670705072167886592146621249448498683247787828879760381241556206547862093156450989687953018938760745711991625401123007401764256137764343829899181448728875101736578307706220386777122218172550717568297100952829852595002096390098461825147363892215404767711755952788746906796962563679561977786486093945680203226522486181637815040845352179834645518246814994258905547349642243493654651930734174995135826895725830540430184728962793871415926535914039784825424142192796639198932348258351990748479774631213467319607687311770202760658019856787782293313748756529317947017508282796173334466023408319243216876351349499743774543521332481988857618117195057452050214708711391482353328053536048318366295527975161202807244466489272785568066909098881103167056257244877546154836906331098097354711945038954490522398489502977422015658526826942312277172915188003715954213744097908268546201423352963583100629465105381282661894752995919575350837048830817208485310197225092008232099157881467637491676098138460400150172780909422245850380775691740223012060408919386264671305215215681546012337187219967499102525807521244789854019999287501404443470087390693124114514966581075489226199121434424095606350006713929073505191648420308402276707050721678865921466212494484986832477878288797603812415562065478620931564509896879530189387607457119916254011230074017642561377643438298991814487288751017365783077062203867771222181725507175682971009528298525950020963900984618251473638922154047677117559527887469067969625636795619777864860939456802032265224861816378150408453521798346455182468149942589055473496422434936546519307341749951358268957258305404301847289627938714159265359140397848254241421927966391989323482583519907484797746312134673196076873117702027606580198567877822933137487565293179470175082827961733344660234083192432168763513494997437745435213324819888576181171950574520502147087113914823533280535360483183662955279751612028072444664892727855680669090988811031670562572448775461548369063310980973547119450389544905223984895029774220156585