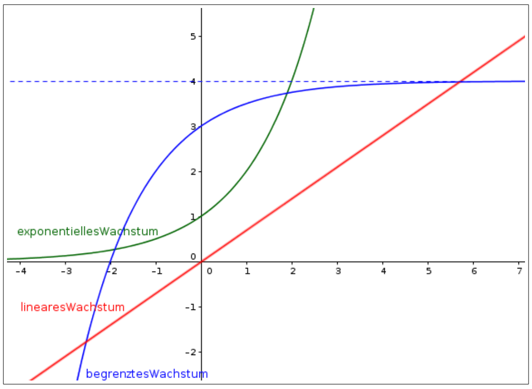
Logistisches Wachstum und der Weg ins Chaos

Im Mathematikunterricht werden schwerpunktmäßig lineare und exponentielle Wachstumsprozesse betrachtet. Während beim linearen Wachstum nach jedem äquidistanten Zeitschritt der Bestand mit dem gleichen Wert addiert wird, multipliziert sich der Bestand beim exponentiellen Wachstum nach jedem Zeitschritt um denselben Faktor.



lineares Wachstum: $y(n)=y(n-1)+a$

exponentielles Wachstum: $y(n)=y(n-1)\cdot a$

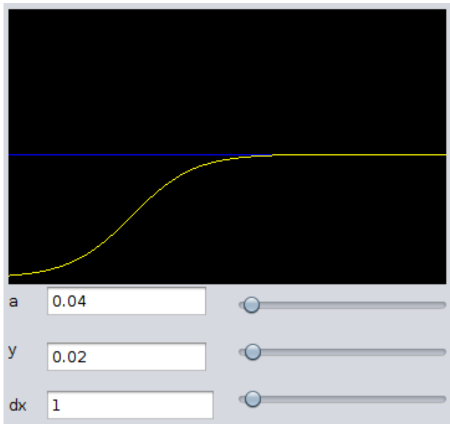
Beim exponentiellen Wachstumsverhalten unterscheidet man noch das Wachstum von einem bestimmten Bestand ausgehend, das im zeitlichen Ablauf immer stärker ansteigt und über alle Grenzen wächst und das begrenzte Wachstum, das sich exponentiell einem Maximalbestand B annähert:

begrenztes Wachstum: $y(n)=y(n-1)+a\cdot(B-y(n-1))$

In der Natur vollziehen sich Wachstumsprozesse aber häufig so, dass zunächst ein exponentielles Wachstum und dann bei Annäherung an einen Maximalbestand ein begrenztes Wachstum auftritt. Dieses Wachstum (logistisches Wachstum) ist proportional zum Bestand und gleichzeitig proportional zu dem Wert, der am Maximalbestand noch fehlt:

$$y(n)=y(n-1)+a\cdot y(n-1)\cdot(B-y(n-1))$$

Mit einem Java-Programm soll der Wachstumsprozess veranschaulicht werden.



Dazu wird der Maximalwert B als 100% bzw. als 1 angenommen. Um den y-Wert für den nächsten Zeitpunkt zu erhalten, wird also mit dem Wachstumsfaktor a folgendermaßen gerechnet:

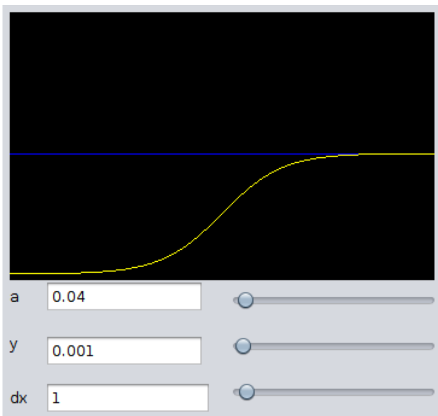
$$y \leftarrow y+a\cdot y\cdot(1-y)$$

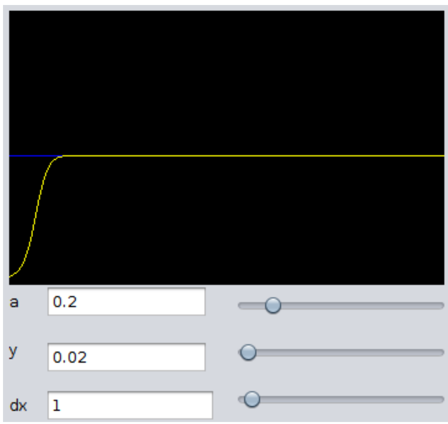
Mit dem Startwert y=0,02 und dem Wachstumsfaktor a=0,04 ergibt sich das nebenstehende Diagramm. Der Wert für dx gibt an, nach wie viel Punkten in der Waagrechten auf dem Bildschirm der nächste Zeitschritt erfolgt.

Man sieht, dass die Bestandskurve zunächst (im linken Viertel des Bildes) exponentiell steigt. Danach erinnert der Verlauf bis zur Bildmitte an ein begrenztes Wachstum. Die waagrechte blaue Linie gibt den Maximalbestand (hier also 1) an.

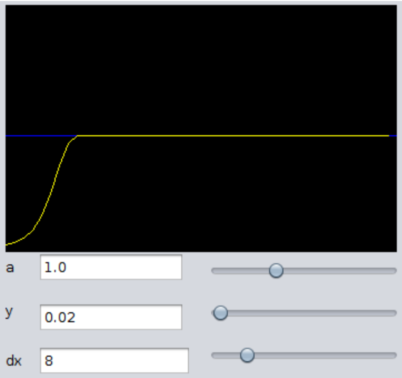
Wird der Startwert y verkleinert, so bleibt die Form der Wachstumskurve erhalten. Die Kurve wird aber weiter nach rechts verschoben.

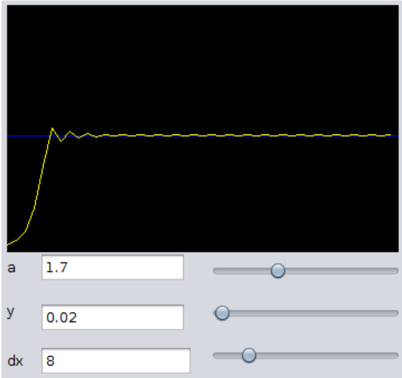
Wird der Wachstumsfaktor a vergrößert, so wächst der Bestand schneller und die Kurve wird gestaucht.

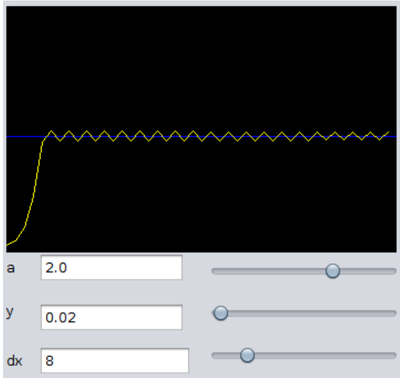




Interessant wird es, wenn der Wachstumsfaktor a immer weiter anwächst:

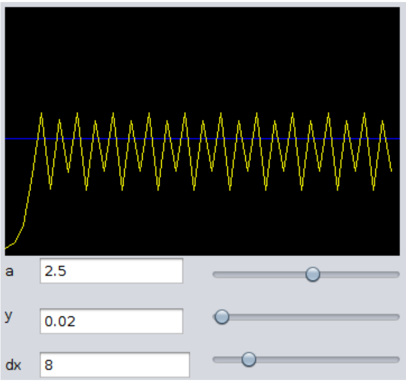


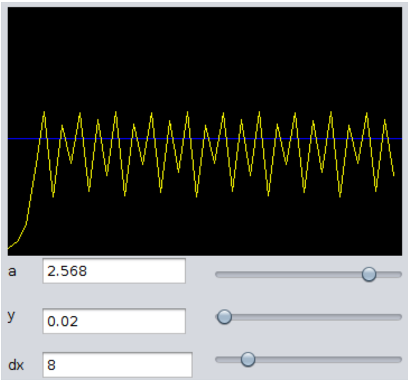


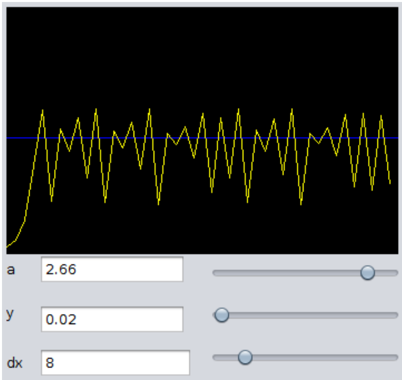


Z. B. bei a=1,7 ist der Zuwachs von einem Zeitschritt zum nächsten so groß, dass der Maximalbestand überschritten wird. Zunahme und Abnahme werden danach immer kleiner, sodass nach längerer Zeit der Bestand zum Maximalbestand konvergiert. Für a=2,0 oszilliert der Bestand zwischen 2 festen Werten.

Geht man über zu noch größeren a-Werten, so gibt es sogar 4 oder mehr Häufungsstellen für den y-Wert:

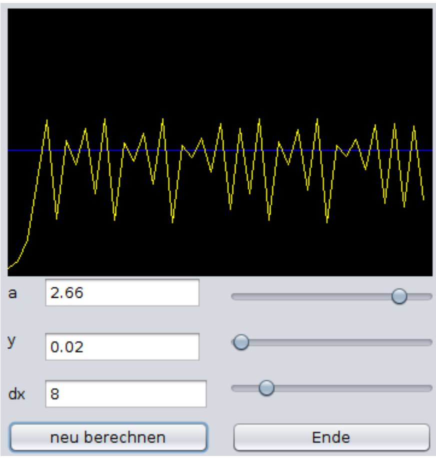


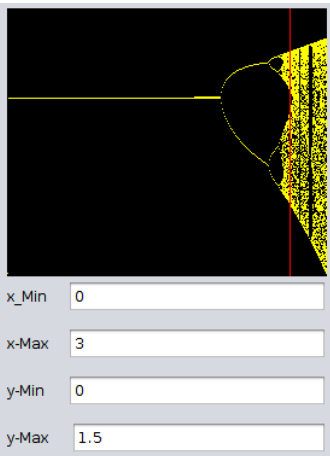


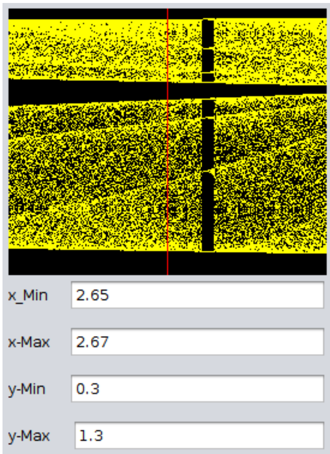


Beim rechten Diagramm ist schon fast ein chaotisches Verhalten der Bestände festzustellen.

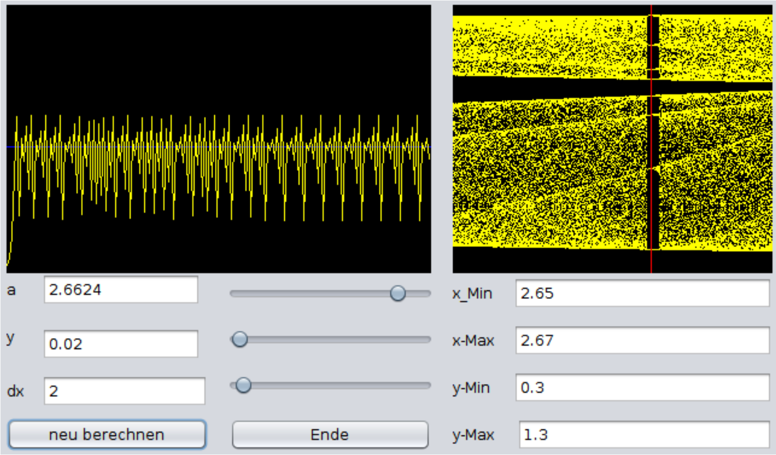
Um eine Übersicht zu erhalten, wie viel Häufungspunkte es bei bestimmten a-Werten gibt, trägt man den a-Wert waagrecht ab, lässt dann einige 100 Zeitschritte vergehen und trägt die dann auftretenden Bestände senkrecht ab. Das daraus entstehende Bild nennt man Feigenbaum-Diagramm. Die rote senkrechte Linie gibt die Stelle des links gewählten a-Wertes an. Durch geeignetes Wählen der Minima- und Maximawerte kann man sich in das Feigenbaum-Diagramm hineinzoomen.







Im Zoom sieht man deutlich, dass im chaotischen Bereich "Inseln der Ordnung" auftreten, in denen es nur wenige Häufungspunkte gibt. Für den Fall a=2,6624 ergeben sich so folgende Diagramme:



Eine weitere Methode, die Entwicklung des Wachstumsverhaltens zu analysieren bietet ein Spinnweb-Diagramm. Formt man den Rekursionsterm $y \leftarrow y + a \cdot y \cdot (1-y)$ folgendermaßen um,

$$y \leftarrow y + a \cdot y \cdot (1-y) = y + a \cdot y - a \cdot y^2 = -a \cdot y^2 + (1+a) \cdot y$$

so erkennt man die Gleichung einer Parabel: $y = -a \cdot x^2 + (1+a) \cdot x$

Nimmt man den y-Startwert und setzt ihn für x ein, so erhält man den nach einem erfolgten Zeitschritt neuen y-Wert. Dieser y-Wert wird dann wieder für x eingesetzt usw.

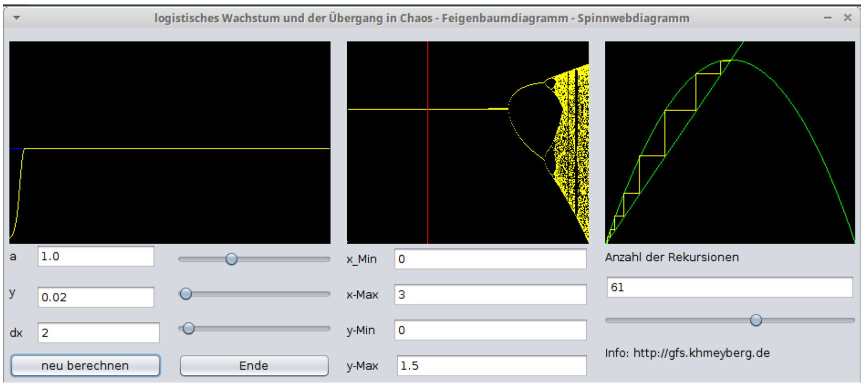
Grafisch kann man das nachvollziehen in folgenden Schritten:

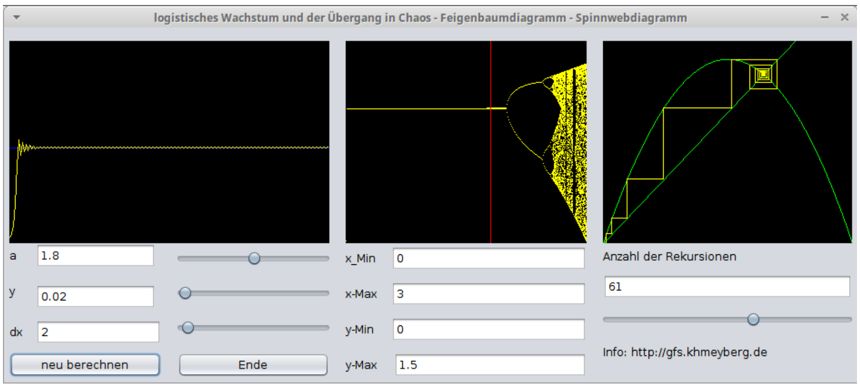
1. Gehe vom y-Wert (auf der waagrechten Achse) senkrecht zum neuen y-Wert auf der Parabel (wegen der Parabelgleichung).

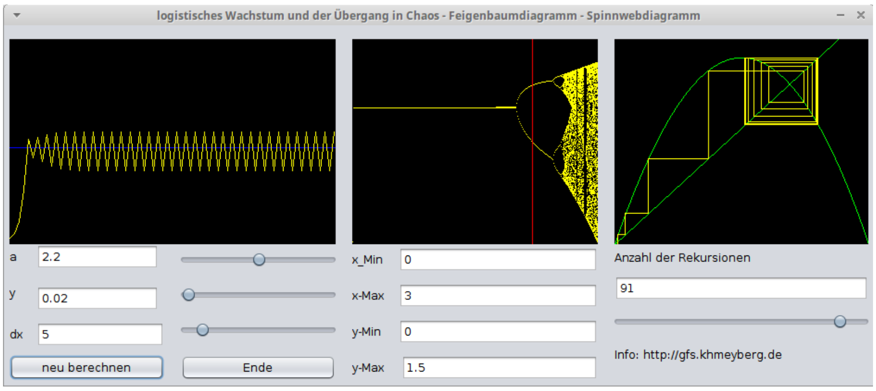
2. Nimm den neuen y-Wert als neuen x-Wert. Gehe dazu waagrecht bis zur Winkelhalbierenden im ersten Quadranten (y=x). Man ist dann auf der waagrechten Achse beim neuen y-Wert angekommen.

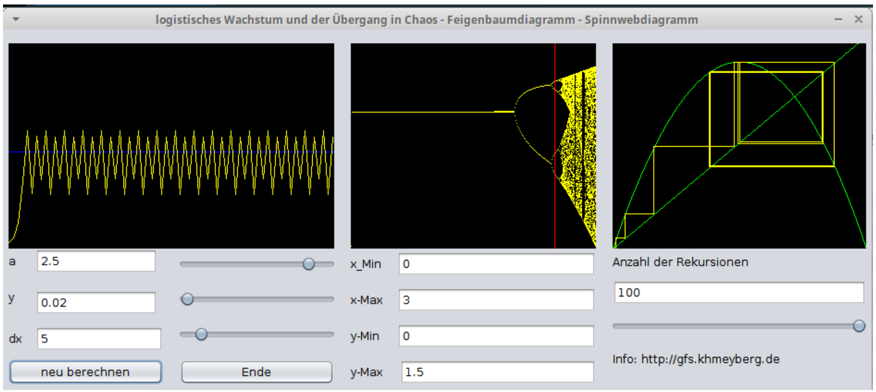
Nun wiederhole die Punkte 1. und 2. beliebig oft.

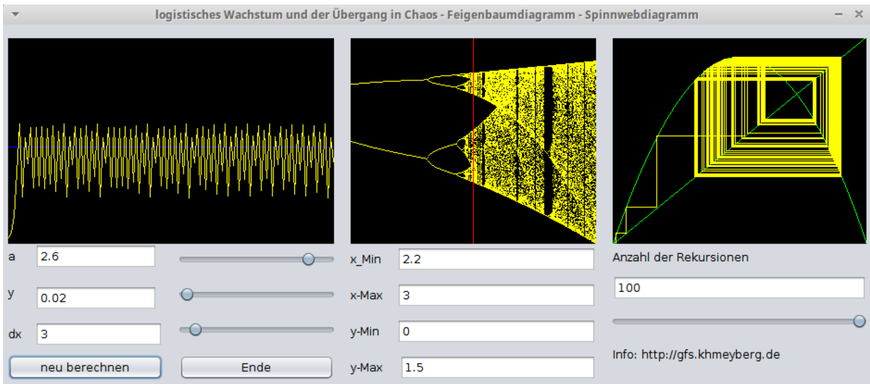
Die folgenden Screenshots zeigen alle 3 Diagramme für verschiedene a-Werte.

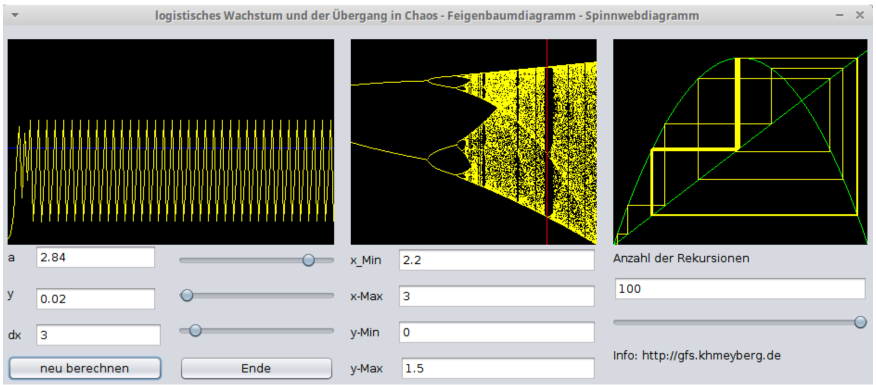












Unter dem jeweiligen Link findet man das ausführbare Java-Programm (Feigenbaum001.jar) und den zugehörigen Netbeans-Ordner (gepackt - Feigenbaum001.zip).